СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ



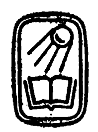
СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Под редакцией
И. А. ЯКОВЛЕВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов физических специальностей высших учебных заведений



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1977

530
С 23
УДК 530

АВТОРЫ:
С. П. СТРЕЛКОВ, Д. В. СИВУХИН, С. Э. ХАЙКИН,
И. А. ЭЛЬЦИН, И. А. ЯКОВЛЕВ

Сергей Павлович Стрелков, Дмитрий Васильевич Сивухин, Семен Эммануилович Хайкин, Иосиф Абрамович Эльцин, Иван Алексеевич Яковлев

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ
ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

М., 1977 г., 272 стр. с илл.

Редакторы *Л. И. Гладнева, Н. А. Михалина*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *Т. С. Плетнева*

Сдано в набор 10/VI 1977 г. Подписано к печати 25/X 1977 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 8,5. Условн. печ. л. 14,28. Уч-изд. л. 14,72. Тираж 80 000 экз. Цена книги 45 коп. Заказ № 1656

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28.

С $\frac{20401-159}{053(02)-77}$ 87-77

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга представляет собой значительно дополненное издание задач по электричеству и магнетизму, публиковавшихся ранее в составе первой части «Сборника задач по общему курсу физики», выходившего в свет в 1949, 1960 и 1964 гг. под редакцией С. Э. Хайкина.

Основу этой части Сборника составляют задачи, сложившиеся у авторов на физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова в период времени, когда общий курс физики читал С. Э. Хайкин, написавший для задачника § 10 «Электромагнитные волны». Теперь, к большому сожалению авторского коллектива, в расширении и модернизации этой книги С. Э. Хайкин (1901—1968) и С. П. Стрелков (1905—1974) уже не смогли принять участия.

Сборник дополнен задачами Д. В. Сивухина, которые в течение ряда лет предлагались для решения студентам Московского физико-технического института. Некоторое число новых задач представлено В. Л. Гинзбургом, а также сотрудниками С. П. Стрелкова, В. И. Шмальгаузеном и А. А. Харламовым. Новый § 11 «Релятивистская электродинамика» написан безвременно скончавшимся В. А. Угаровым (1920—1977) на основе опыта многолетней и плодотворной его работы на физическом факультете МГПИ им. В. И. Ленина. Содержание этого нового параграфа было любезно просмотрено Н. П. Клепиковым.

Рукопись Сборника рецензировалась на физическом факультете Киргизского государственного университета А. М. Жердевым, рецензия которого обсуждалась кафедрами общей физики и физики твердого тела КГУ (зав. кафедрами Д. И. Ибраимов и Л. В. Тузов). Ряд весьма полезных замечаний сделал доцент физического факультета МГУ В. К. Петерсон. Авторский коллектив задачника и его редактор выражают искреннюю признательность названным рецензентам за ценные замечания, содействовавшие улучшению задачника.

И. А. Яковлев

ЗАДАЧИ

§ 1. Электростатика

1. Чтобы представить себе величину электрического заряда 1 Кл, подсчитайте, с какой силой F отталкивались бы два одноименных заряда величиной каждый 1 Кл, находясь на расстоянии 1 км друг от друга.

2. С какой силой F притягивается электрон водородного атома к ядру, если диаметр атома водорода порядка $2\times\times10^{-8}$ см? Заряд ядра $4{,}8\cdot10^{-10}$ СГСЭ.

3. Два одинаковых шарика радиуса $r=1$ см и массы $m=9{,}81$ г подвешены в одной точке на шелковинках длины $l=19$ см. Шарикам сообщены одинаковые по величине и знаку заряды. Как велик заряд q каждого шарика, если они разошлись так, что шелковинки образуют угол $2\alpha=90°$?

4. Будет ли устойчивым положение равновесия точечного заряда, находящегося посередине между двумя другими одинаковыми точечными зарядами, знак которых тот же или противоположен знаку первого заряда?

5. Один из опытов Кулона, с помощью которого он убедился, что сила притяжения между двумя разноименными точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, состоял в следующем. В окрестности маленького заряженного шарика подвешивалась на нити небольшая горизонтальная шеллаковая стрелка, на одном конце которой был прикреплен небольшой электрически заряженный кружок из золотой фольги. Измерялся период малых колебаний стрелки T в зависимости от ее расстояния d до заряженного шарика. Предполагая справедливым закон Кулона, найти зависимость периода колебаний стрелки от указанного расстояния и от других параметров системы. Длина стрелки l очень мала по сравнению с расстоянием d.

6. Вычислить отношение силы электрического отталкивания F_e двух протонов к силе их гравитационного притяжения F_g. Сделать тот же расчет для электронов.

7. Шарик радиуса $r=1$ см заряжен до потенциала $\varphi=3000$ В. Сколько электронов n надо отнять от шарика для такой электризации? Насколько при этом уменьшится масса шарика M?

8. Две одинаковые и одинаково заряженные капли несжимаемой проводящей жидкости находятся на большом (бесконечном) расстоянии друг от друга. Заряд, радиус и масса каждой капли равны соответственно q, r и m. Какую минимальную скорость v вдоль прямой, соединяющей их центры, надо сообщить каждой капле, чтобы они стали двигаться навстречу друг другу и при столкновении соединились в одну каплю? Поверхностное натяжение не учитывать.

9. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые одноименные заряды, равные q. Какой заряд Q противоположного знака необходимо поместить в центре квадрата, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

10. Три одинаковых одноименных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q противоположного знака нужно поместить в центре этого треугольника, чтобы результирующая сила, действующая на каждый заряд, была равна нулю?

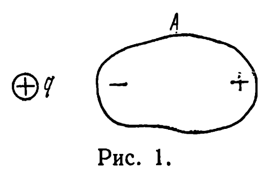


Рис. 1.

11. Доказать, что заряды каждого знака, индуцированные на проводнике A поднесенным к нему зарядом $+q$ (рис. 1), всегда меньше q.

12. Проводник заряжается от электрофора путем повторяющихся поднесений к пластинке, которая после каждого поднесения снова заряжается от того же электрофора до заряда Q. Пусть q_1 — заряд на проводнике после первой операции. Определить заряд q на проводнике после очень большого числа операций.

13. Определить напряженность поля E внутри и вне безграничного плоского слоя толщины d, в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью ρ.

Указание. Воспользоваться симметрией системы зарядов и применить теорему Гаусса.

14. На вертикальной пластине достаточно больших размеров равномерно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma=10$ СГСЭ. На прикрепленной к пластине нити подвешен маленький шарик массы $m=1$ г,

несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти его заряд q, если нить образует с вертикалью угол $\alpha=30°$.

15. Определить силу притяжения между точечным зарядом q и металлическим шаром (рис. 2). Рассмотреть два случая: 1) шар заземлен; 2) шар изолирован, а полный заряд его равен нулю.

16. В условиях предыдущей задачи найти работу A, которую надо затратить, чтобы точечный заряд q удалить в бесконечность.

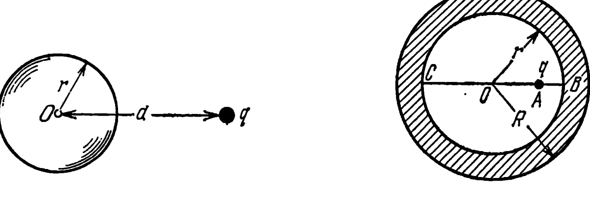


Рис. 2. Рис. 3.

17. Внутри сферической незаряженной проводящей оболочки в точке A, на расстоянии $OA=d$ от ее центра, помещен точечный заряд q (рис. 3). Радиус внутренней поверхности оболочки r, а внешней R. Найти: 1) поверхностную плотность индуцированных электрических зарядов на внешней поверхности оболочки; 2) потенциал оболочки, принимая за нуль потенциал бесконечно удаленной точки; 3) поверхностную плотность индуцированных зарядов в точках B и C внутренней поверхности оболочки.

18. Два длинных тонких провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+\varkappa$ и $-\varkappa$. Определить напряженность поля E в точке, лежащей в плоскости симметрии на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода.

Указание. Пользуясь теоремой Гаусса, найти напряженность поля, создаваемого каждым из проводов, а затем геометрическую сумму этих полей.

19. Диск радиуса R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на перпендикуляре к диску, проходящем через его центр, на расстоянии d от диска.

20. Доказать, что сила взаимодействия между зарядом $+q$ и проводящей бесконечной плоскостью, отстоящей от заряда на расстоянии d, такая же, как между данным

зарядом и зарядом $-q$, расположенным симметрично относительно плоскости.

21. Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (рис. 4). Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла O равно d.

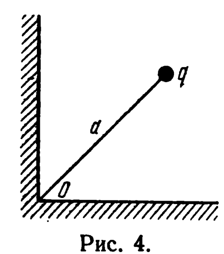


Рис. 4.

22. Точечный заряд q находится между двумя металлическими плоскостями, образующими между собой двугранный угол 60° (рис. 5). Найти предел, к которому стремится напряженность электрического поля E, когда точка наблюдения приближается к ребру O, все время оставаясь между металлическими плоскостями. Как изменится результат, если заряд будет неточечным?

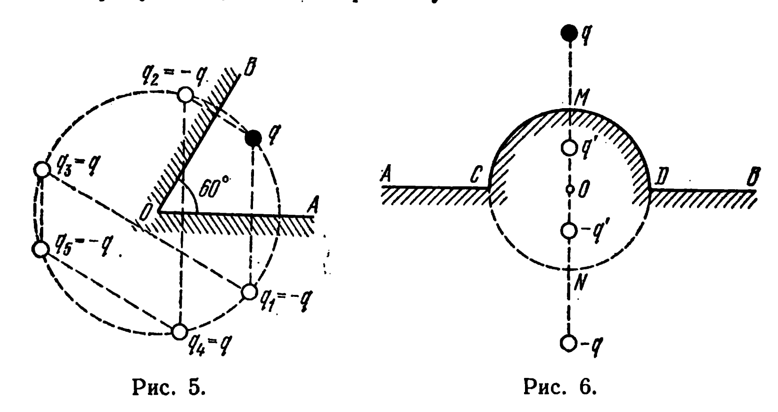


Рис. 5. Рис. 6.

23. На бесконечной плоской поверхности проводника имеется сферический бугор CMD, центр которого лежит в той же плоскости (рис. 6). На перпендикуляре вне проводника расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве.

24. Найти силу притяжения F между точечным электрическим диполем и бесконечной металлической пластинкой, если дипольный момент $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен к плоскостям пластинки, а расстояние диполя до ближайшей поверхности пластинки равно d. Определить также работу A_{12}, которую надо затратить, чтобы удалить диполь от пластинки с расстояния d_1 до d_2.

25. На расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд $+q$. Определить напряженность поля E в точке A (рис. 7), отстоящей от плоскости и от заряда на расстоянии h.

26. Бесконечная плоскость равномерно заряжена положительным зарядом с поверхностной плотностью σ. Найти разность потенциалов V между точкой A, находящейся на расстоянии d от плоскости, и точкой B, находящейся на плоскости.

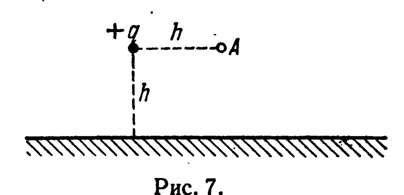


Рис. 7.

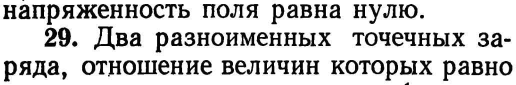
27. Во внешнее однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}$ (рис. 8) внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках A и B, C и D?

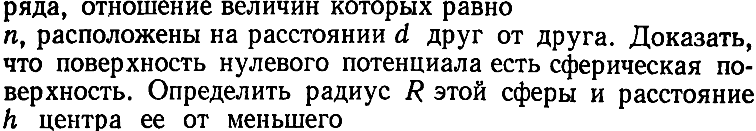
28. Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов $+q$ и $+4q$, находящихся на расстоянии d друг от друга.

Указание. Найти точку, в которой напряженность поля равна нулю. Найти точки на прямой, соединяющей заряды, в которых потенциал имеет то же значение, что и в точке, в которой напряженность поля равна нулю.

Рис. 8.

29. Два разноименных точечных заряда, отношение величин которых равно n, расположены на расстоянии d друг от друга. Доказать, что поверхность нулевого потенциала есть сферическая поверхность. Определить радиус R этой сферы и расстояние h центра ее от меньшего заряда.





30. Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между ними равно d и дипольный момент $\boldsymbol{p}$ направлен вдоль соединяющей их прямой.

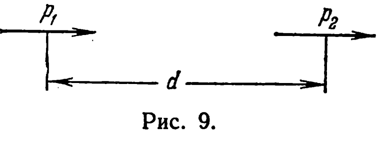


Рис. 9.

31. Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей, если их дипольные моменты $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ направлены вдоль

соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно d (рис. 9).

32. Найти уравнение силовых линий электрического поля точечного диполя в полярной системе координат.

33. Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

34. Металлический шар радиуса R имеет заряд Q. Точечный заряд q помещен на расстоянии d от центра шара (рис. 10). Найти потенциал шара φ.

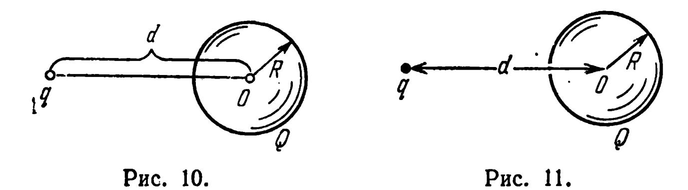


Рис. 10. Рис. 11.

35. Полый шар радиуса R имеет заряд Q; в шаре имеется малое отверстие (рис. 11). Как будет меняться потенциал шара, если точечный заряд q перемещать из бесконечности через отверстие внутрь шара?

36. Показать, что для параллельных проводов, расстояние между которыми велико по сравнению с их радиусами: 1) эквипотенциальные поверхности суть круговые цилиндры, оси которых параллельны проводам и лежат с ними в одной плоскости; 2) силовые линии расположены в плоскости, перпендикулярной к проводам, и представляют собой окружности, центры которых лежат на перпендикуляре, проходящем через середину соединяющего следы проводов отрезка.

37. Начертить схему силовых линий и эквипотенциальных поверхностей для системы двух точечных зарядов $+q$ и $-4q$.

Указание. Найти точку, в которой напряженность поля равна нулю. Найти сферу нулевого потенциала, а также точку на прямой, соединяющей заряды, в которой потенциал тот же, что и в точке, где напряженность поля равна нулю.

38. Металлический шар радиуса R соединен очень тонкой проволокой с землей. На расстоянии $d=2R$ от центра этого шара находится электрический заряд $+q$. Чему равен отрицательный заряд Q шара? Поверхность земли и все ос-

тальные предметы можно считать достаточно удаленными, а влиянием соединяющей проволоки можно пренебречь.

39. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра заряженного проводящего шара Q (рис. 12). Каков заряд шара, если известно, что сила взаимодействия между зарядами равна нулю?

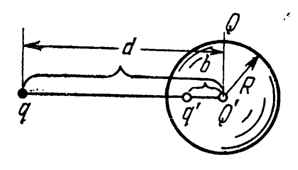


Рис. 12.

40. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра заземленного проводящего шара Q. С какой силой F притягивается заряд к шару?

41. Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра незаряженного проводящего шара радиуса R. Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

42. Заземленный шар находится вблизи точечного заряда (рис. 13). Определить максимальную и минимальную поверхностные плотности наведенного на шаре заряда.

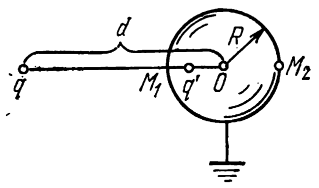


Рис. 13.

43. В равномерно заряженной сфере вырезано малое отверстие. Какова напряженность поля в центре отверстия?

44. Найти потенциал поля, созданного зарядами, равномерно распределенными вдоль бесконечной прямой с линейной плотностью $\varkappa$.

45. Прямой длинный цилиндрический проводник радиуса R несет положительный заряд с равномерной поверхностной плотностью σ. Какова разность потенциалов V между поверхностью цилиндра и точкой A, находящейся на расстоянии $d>R$ от оси цилиндра?

46. Электрическое поле в электростатике всегда перпендикулярно к поверхности проводника. Пользуясь этим, доказать, что вблизи искривленной поверхности заряженного проводника электрическое поле удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial E}{\partial n} = -E\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где производная берется по направлению внешней нормали к поверхности проводника, а R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны этой поверхности (они считаются положительными для выпуклых и отрицательными для вогнутых сечений поверхности).

Указание. Взять две бесконечно близкие эквипотенциальные поверхности и произвести нормальное сечение их четырьмя плоскостями, вырезающими на этих эквипотенциальных поверхностях два бесконечно малых прямоугольника. К полученному бесконечно малому объему применить теорему Гаусса.

47. Потенциал электростатического поля в некоторой области зависит только от координаты x:

$$\varphi = -\frac{ax^2}{2} + c.$$

Какова будет напряженность поля? При каком распределении зарядов получится такое поле?

48. Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычислить напряженность электрического поля равномерно заряженных шара радиуса R и бесконечной пластинки толщины $2h$. Объемная плотность электричества равна ρ.

49. В шаре, равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние r. Определить электрическое поле внутри полости.

Указание. Заполнить мысленно полость электричествами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров.

50. Сферический слой, ограниченный двумя концентрическими сферами, заряжен электричеством с постоянной объемной плотностью. Пользуясь законом Кулона, показать, что электрическое поле в полости, ограниченной таким слоем, равно нулю.

51. Сферический слой в предыдущей задаче равномерно сжимают вдоль трех взаимно перпендикулярных диаметров, и притом так, что во время сжатия электрические заряды внутри слоя неподвижно закреплены. В результате он переходит в слой эллипсоидальный. Показать, что при таком сжатии электрическое поле внутри полости остается равным нулю.

52. Найти распределение электричества по поверхности трехосного проводящего эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Указание. Воспользоваться результатом решения предыдущей задачи.

53. Найти поверхностную плотность электричества на бесконечно тонкой проводящей эллиптической пластинке, получающейся равномерным сжатием трехосного эллипсоида в направлении оси Z.

Указание. См. предыдущую задачу.

54. Заряженный проводящий эллипсоид мысленно разделен на части равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными к одной из его главных осей. Показать, что, каково бы ни было число таких частей, величины их зарядов будут всегда одинаковы. В частности, если эллипсоид является вытянутым и бесконечно тонким, то электричество распределится по его длине равномерно.

Указание. См. задачу 51.

55. Принимая Землю за шар радиуса $R=6400$ км, определить заряд Q Земли, если напряженность электрического поля у поверхности Земли составляет $E=130$ В/м. Определить потенциал φ поверхности Земли, принимая $\varphi_\infty=0$.

56. Земля непрерывно облучается космическими лучами высокой энергии, приходящими из пространства вне Солнечной системы. Космические лучи в основном состоят из протонов, средняя энергия $\mathcal{E}$ которых составляет несколько миллиардов электронвольт. Интенсивность $\mathfrak{I}$ потока протонов, достигающих земной атмосферы, равна примерно одному протону на квадратный сантиметр в секунду. Оценить время, необходимое для того, чтобы протоны космических лучей повысили потенциал Земли настолько, чтобы они уже не могли попадать на поверхность Земли из-за электрического отталкивания. Объяснить, почему и по истечении этого времени протоны космических лучей продолжают достигать земной поверхности.

57. Очень маленький шарик, имеющий заряд $+q$, поднесен к большому металлическому листу на малое расстояние d. Чему равна напряженность поля E: 1) у основания перпендикуляра, опущенного из шарика на плоскость листа; 2) на расстоянии $2d$ от плоскости на том же перпендикуляре?

58. Найти приближенное выражение для силы F, действующей в неоднородном поле E в вакууме на маленький металлический шарик радиуса R, если на протяжении диаметра шарика поле E меняется незначительно.

Указание. Во внешнем однородном поле E шарик приобретает дипольный момент $p=R^3E$.

59. Как меняется с расстоянием d сила взаимодействия F между двумя маленькими металлическими шариками, из которых один заряжен, а другой не заряжен?

60. Два одинаковых положительных заряда q находятся на одинаковом расстоянии d от безграничной проводящей плоскости по одну сторону от нее. Расстояние между зарядами равно $2d$. Найти величину и направление вектора напряженности поля на середине расстояния между зарядами.

61. Заряженный проводник находится внутри замкнутой металлической оболочки. 1) Изменится ли электрическое поле внутри оболочки, если извне поднести к ней заряженный проводник? 2) Будет ли изменяться поле внутри и вне оболочки, если внутренний проводник перемещать внутри оболочки?

62. Какова была бы напряженность поля E в центре сферической поверхности радиуса R, если бы одна половина этой поверхности была покрыта зарядами с постоянной поверхностной плотностью σ, а другая половина также равномерно покрыта зарядами, но с вдвое большей плотностью?

63. Металлический шар несет некоторый заряд. Как изменится напряженность поля вне и внутри оболочки, если шар заключить в концентрическую сферическую оболочку из однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε?

64. Как ответить на вопрос предыдущей задачи, если внешняя поверхность оболочки будет иметь не сферическую, а произвольную форму?

65. Между двумя параллельными проводящими пластинками, заряженными равными разноименными зарядами, помещают диэлектрическую

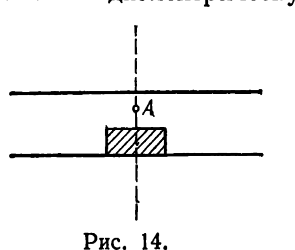


Рис. 14.

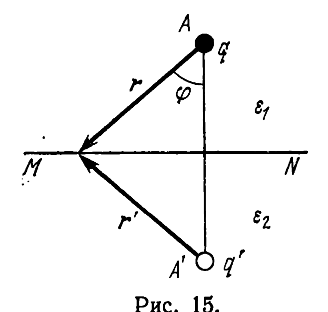


Рис. 15.

пластинку, как указано на рис. 14. Изменится ли напряженность поля в точке A после внесения пластинки?

66. Два однородных диэлектрика с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 граничат друг с другом вдоль плоскости MN (рис. 15). В точке A первого диэлектрика помещен точечный заряд q. Найти электрическое поле в каждом из диэлектриков.

67. Какая сила действует на точечный заряд q вблизи плоской границы раздела двух диэлектриков?

68. Какой наибольший заряд Q можно поместить на металлическом шаре радиуса $R=15$ см, если диэлектрическую прочность воздуха E принять равной 30 000 В/см?

69. По сфере радиуса R равномерно распределен заряд Q. Определить давление изнутри на поверхность сферы, обусловленное взаимодействием зарядов.

70. Как известно, давление, вызываемое поверхностным натяжением сферической жидкой пленки, обратно пропорционально ее радиусу. Будет ли устойчивым мыльный пузырь, если сообщить ему некоторый заряд?

71. Поверхностное натяжение сферического мыльного пузыря $\sigma=50$ дин/см, радиус $R=1$ см, наружное атмосферное давление $P=10^6$ дин/см^2. Какой заряд Q надо сообщить пузырю, чтобы его радиус увеличился вдвое? При каких размерах пузыря поверхностное натяжение практически не влияет на результат и при каких является определяющим?

72. По сферической поверхности радиуса R равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью σ. Найти потенциал φ и напряженность поля E зарядов в зависимости от расстояния d до центра сферы. Построить графики зависимости этих величин от координат.

73. На поверхность тонкой сферы радиуса R наносится равномерно заряд. Когда полный заряд сферы достигает величины Q, сфера под действием электрических сил отталкивания разрывается на одинаковые части, летящие в разные стороны. Каждая из частей имеет массу m и заряд q. Какой максимальной скорости может достигнуть осколок?

74. Металлический шар радиуса R_1, несущий заряд Q, окружен расположенным концентрически полым металлическим шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3. Заряд внешнего шара равен нулю. Построить график зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Изменятся ли потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

75. Вычертить графики зависимости напряженности поля E и потенциала φ от расстояния r до центра шара для

следующего случая: металлический шар с радиусом 10 см имеет заряд 20 СГСЭ и окружен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$, причем диэлектрик простирается до сферы радиуса 20 см.

76. Два проводника имеют заряды $-q$ и $+2q$ соответственно. Эти проводники вносят внутрь замкнутой металлической оболочки, потенциал которой равен φ. Показать, что потенциал проводника, несущего заряд $+2q$, будет больше φ.

77. Мыльный пузырь радиуса R находится в равновесии. Если ему сообщить некоторый заряд, он будет увеличиваться вследствие появления сил отталкивания между зарядами, стремясь перейти к новому устойчивому состоянию с радиусом $R_1>R$ (см. задачу 70). Какой заряд нужно поместить в центре пузыря, чтобы уравновесить действие этих сил при его прежнем радиусе?

78. Проводящая сфера радиуса R составлена из двух полусфер. Определить силу F, с которой отталкиваются эти полусферы, если полный заряд сферы равен Q.

79. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если в центре сферы поместить дополнительно точечный заряд q? Сферу считать полой и бесконечно тонкой.

80. Длинный проводящий цилиндр радиуса R составлен из двух половин. Определить силу отталкивания F, действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд $\varkappa$.

81. Как изменится ответ в предыдущей задаче, если вдоль оси цилиндра поместить дополнительно тонкую заряженную нить, на единицу длины которой приходится заряд $\varkappa_0$? Цилиндр считать полым, а его стенки — бесконечно тонкими.

82. Какое поле создавали бы две безграничные взаимно перпендикулярные плоскости, если бы на них были равномерно нанесены электрические заряды одного знака с поверхностной плотностью заряда на одной σ, а на другой 2σ?

83. Определить эквипотенциальные поверхности по условиям предыдущей задачи и закон изменения потенциала на плоскостях, несущих заряды.

84. Заряды распределены равномерно по поверхности двух концентрических сфер с радиусами 10 и 20 см, причем поверхностные плотности зарядов на обеих сферах одинаковы. Найти плотность заряда σ, если потенциал в центре сфер равен 300 В, а на бесконечности равен нулю.

85. Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами $R_1<R_2<R_3$, находящихся в вакууме, крайние заземлены, а средней сообщен электрический заряд Q. Найти напряженность электрического поля во всем пространстве.

86. Две концентрические проводящие сферы с радиусами R и $2R$ заряжены: внутренняя — одним микрокулоном, внешняя — двумя микрокулонами электричества одного и того же знака. На расстоянии $3R$ от центра сфер потенциал $\varphi=30$ СГСЭ. Найти R.

87. Какова была бы напряженность поля в произвольной точке пространства между плоскостями задачи 82, если бы в дополнение к зарядам на плоскостях были равномерно нанесены заряды с поверхностной плотностью -3σ по поверхности цилиндра радиуса R, ось которого совпадает с прямой пересечения заряженных плоскостей?

88. Какова была бы напряженность поля в произвольной точке пространства, если бы заряды были равномерно распределены с поверхностной плотностью σ на бесконечной плоскости и на поверхности сферы радиуса R с центром на данной плоскости?

89. Подсчитать среднюю объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поля на поверхности Земли равна 100 В/м, а на высоте $h=1{,}5$ км эта напряженность падает до 25 В/м.

90. Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 16). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) равен q_1 для первой пластинки и q_2 — для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

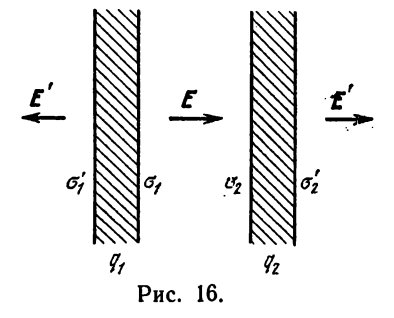


Рис. 16.

91. Три хорошо изолированные параллельные металлические пластинки расположены на равном расстоянии друг от друга, как показано на рис. 17. Пластинка *1* соеди-

нена с землей, а пластинки *2* и *3* присоединены к зажимам батареи в 80 В. Батарею отключают и после этого пластинку *1* отключают от земли, а пластинку *2* присоединяют к земле. 1) Чему будет равна разность потенциалов между пластинками *1* и *2*, *2* и *3*? 2) Какова будет разность потенциалов между пластинками, если сначала, после отключения батареи, соединить с землей пластинку *2*, а затем уже отключить от земли пластинку *1* и, наконец, пластинку *2*?

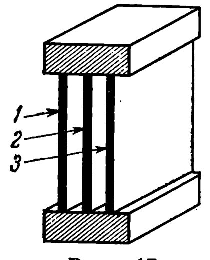


Рис. 17.

92. Батарею в 80 В присоединяют к пластинкам *1* и *2* (см. предыдущую задачу) при соединенных накоротко пластинках *2* и *3*. Какова будет разность потенциалов между пластинками, если сначала отключить батарею, затем разъединить пластинки *2* и *3* и, наконец, соединить третью пластинку с первой (пластинка *2* все время соединена с землей)?

93. Из трех параллельных металлических пластинок *A*, *B* и *C* (рис. 18) крайние *A* и *B* неподвижны и соединены с гальванической батареей, поддерживающей разность потенциалов *V* между ними постоянной. Средняя пластинка *C* сначала находится в контакте с верхней пластинкой *A*. Затем с помощью изолирующей ручки она перемещается по направлению к нижней пластинке. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженности полей E_1 и E_2 в зазорах между пластинками в зависимости от переменного расстояния x между пластинками *A* и *C*, если сумма зазоров между пластинками равна d.

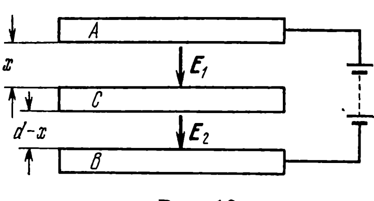


Рис. 18.

94. Даны потенциалы φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 в четырех смежных вершинах малого кубика. Как можно приближенно определить напряженность поля в области этих точек?

95. Три одинаковые пластинки расположены параллельно друг другу на расстоянии 1 мм одна от другой (очень малом по сравнению с линейными размерами пластинки). Каковы разности потенциалов между пластинками, если на первой находится равномерно распределенный заряд с по-

верхностной плотностью +0,2 СГСЭ, на второй +0,4 СГСЭ и на третьей —0,6 СГСЭ?

96. Как изменится разность потенциалов между пластинками предыдущей задачи, если пространство между пластинками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$?

97. Три одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряд q_3 на третьем шаре.

98. Четыре одинаковых изолированных металлических шара расположены в вершинах правильного тетраэдра. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряды на двух остальных шарах.

99. Два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами $R_1=10$ мм и $R_2=10{,}5$ мм заряжены одноименными зарядами, причем поверхностная плотность зарядов на внешнем цилиндре 2 СГСЭ, а на внутреннем 1 СГСЭ. Найти разность потенциалов V между цилиндрами.

100. Определить величину напряженности E электрического поля вне цилиндров при условиях предыдущей задачи.

101. Показать, что эквипотенциальными поверхностями двух параллельных бесконечно длинных прямых, равномерно заряженных электричеством противоположного знака, являются круговые цилиндры, оси которых параллельны рассматриваемым линиям и лежат с ними в одной плоскости.

102. В электрическом поле точечного заряда q на расстоянии d находится свободно поворачивающийся электрический диполь с дипольным моментом p. Какую работу A надо совершить, чтобы удалить диполь в бесконечность? Считать, что длина диполя очень мала по сравнению с d.

103. Может ли существовать в вакууме электростатическое поле, вектор напряженности которого $\boldsymbol{E}$ во всем объеме поля одинаково направлен, но по величине изменяется, например, по линейному закону, если переходить

от точки к точке по нормальному к полю направлению (рис. 19)?

104. Имеется заряженный до некоторого положительного потенциала изолированный проводник. Что произойдет с потенциалом этого проводника, если приблизить к нему на конечное расстояние проводящую плоскость, соединенную с землей?

Рис. 19.

105. Как изменится разность потенциалов между двумя изолированными заряженными проводниками, если между ними ввести металлическую пластину, толщиной которой нельзя пренебречь по сравнению с расстоянием между проводниками?

106. Две удаленные от остальных тел одинаковые металлические пластины площадью S, находящиеся друг от друга на очень малом по сравнению с их линейными размерами расстоянии d, заряжены: одна зарядом $+q$, а другая $+2q$. Какова разность потенциалов V между ними?

107. Каков будет характер электрического поля в пространстве между пластинами и вне пластин в условиях предыдущей задачи? Какова напряженность поля с внешней стороны пластин, вблизи их середины?

108. Две проводящие концентрические сферы имеют радиусы $R_1=10$ см и $R_2=20$ см. На каждой из них равномерно распределен заряд $q=+50$ СГСЭ. Чему равна разность потенциалов V между ними и какова напряженность поля внутри сфер и снаружи?

109. Металлическому шару диаметром 20 м сообщен заряд 1 Кл. 1) Каков будет потенциал шара относительно бесконечно удаленной, концентрической с ним сферы? 2) Удержится ли заряд на шаре, если он будет окружен воздухом, диэлектрическая прочность которого $E=3$ кВ/мм?

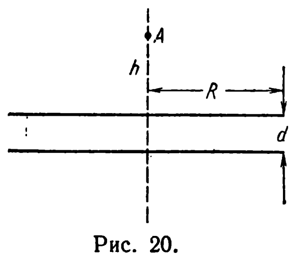


Рис. 20.

110. Два одинаковых круглых диска радиуса R, заряженные разноименными зарядами, распределенными равномерно с поверхностной плотностью σ, находятся на небольшом расстоянии d друг от друга. Найти напряженность поля в точке A, расположенной на общей оси дисков на расстоянии h от ближайшего диска (рис. 20).

111. Обкладки плоского конденсатора сделаны из прямоугольных полосок фольги размером 5×10 см², наклеенных на парафинированную бумагу ($\varepsilon=2$) толщиной 0,1 мм. К конденсатору приложена разность потенциалов 100 В. Какой заряд (в единицах СГСЭ) находится на каждой из обкладок?

112. Как изменится напряженность поля между обкладками уединенного плоского конденсатора, если на одной из обкладок заряд будет увеличен в два раза?

113. Плоский конденсатор имеет емкость 600 пФ. Насколько она изменится, если ввести между обкладками параллельно им медный лист, толщина которого равна 1/4 расстояния между обкладками? Будет ли влиять на результат положение листа?

114. Металлический шар радиуса 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика ($\varepsilon=7$) толщиной 1 см и помещен концентрично в металлической сфере с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость C такого конденсатора?

115. В неограниченной диэлектрической однородной жидкости с диэлектрической проницаемостью ε помещен однородный шар с той же диэлектрической проницаемостью, равномерно заряженный электричеством с объемной плотностью ρ. В шаре сделана сферическая полость, куда помещен меньший шар радиуса R из того же материала, также равномерно заряженный с объемной плотностью ρ электричеством того же знака. Зазор между поверхностью малого шара и стенками полости пренебрежимо мал. Определить силу F, действующую на меньший шар, зная расстояние между центрами обоих шаров.

116. Определить приближенно емкость между двумя одинаковыми шарами радиуса R, находящимися на очень большом (по сравнению с R) расстоянии. Все остальные тела также далеки от шаров.

117. Электроды катодной лампы — анод, сетка и катод — обладают определенной емкостью относительно друг друга. При расчетах удобно рассматривать их как конденсаторы малых емкостей, соединенные так, как показано на рис. 21. Определить общую емкость между точками A и B, если $C_{а\text{-}с}$ — емкость анод-сетка, $C_{с\text{-}к}$ — емкость сетка-катод, $C_{а\text{-}к}$ — емкость анод-катод.

Рис. 21.

118. Для измерения емкостей между электродами трехэлектродной лампы поступают так: соединяют накоротко

сетку и анод и измеряют емкость C_1 между катодом и остальными электродами; затем соединяют накоротко катод и анод и измеряют емкость C_2 между сеткой и остальными электродами; наконец, соединяют накоротко сетку и катод и измеряют емкость C_3 между анодом и остальными электродами. Как, измерив C_1, C_2 и C_3, определить межэлектродные емкости $C_{а\text{-}к}$, $C_{а\text{-}с}$, $C_{с\text{-}к}$ (рис. 21)?

119. Батарея из четырех одинаковых конденсаторов включена один раз по схеме *а*), а другой раз по схеме *б*) (рис. 22). 1) В каком случае емкость батареи будет больше? 2) Если емкости конденсаторов различны, то какому соотношению они должны удовлетворять, чтобы при переключении со схемы *а*) на схему *б*) емкость батареи не менялась?

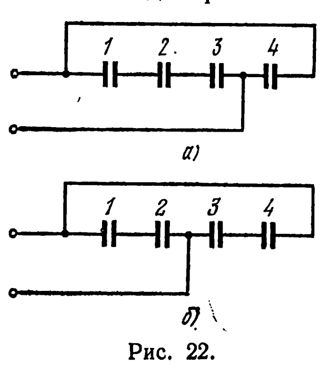


Рис. 22.

120. Показать, что формулы для емкости цилиндрического и сферического конденсаторов переходят в формулу для емкости плоского конденсатора при малых разностях между радиусами внутренней и внешней обкладок.

121. В трансформаторах высокого напряжения для проведения провода через крышку употребляются так называемые конденсаторные клеммы. Они представляют собой тонкие коаксиальные цилиндрические изолирующие трубки, отделяющиеся друг от друга тонкими листами станиоля, образуя комбинацию последовательно соединенных цилиндрических конденсаторов (рис. 23). Как должна меняться длина изолирующих трубок, чтобы все эти конденсаторы имели одинаковую емкость? В чем смысл применения таких конденсаторных клемм?

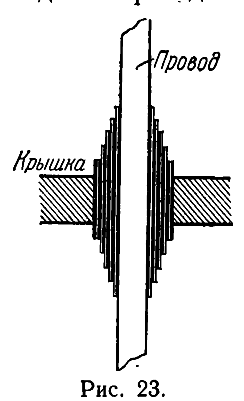


Рис. 23.

122. Плоский конденсатор состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии 0,5 мм. Как изменится емкость конденсатора, если его поместить в изолированную металлическую коробку («экранировать»), стенки которой будут находиться на расстоянии 0,25 мм от пластин

(рис. 24). Искажением поля у краев конденсаторов пренебречь.

123. Как изменится емкость помещенного в коробку конденсатора (см. предыдущую задачу), если коробку соединить с одной из пластин?

124. Два конденсатора, емкости которых C_1 и C_2, соединены последовательно и присоединены к источнику э. д. с. $\mathscr{E}$. Определить падение напряжения на каждом из конденсаторов.

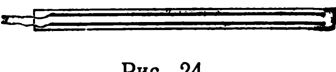


Рис. 24.

125. Четыре одинаковых конденсатора соединены, как показано на рис. 25, и присоединены к батарее $\mathscr{E}$. Ключ K_2 сначала разомкнут, а ключ K_1 замкнут. Затем размыкают ключ K_1 и замыкают ключ K_2. Какова будет разность потенциалов на каждом конденсаторе, если э. д. с. батареи $\mathscr{E}=9$ В?

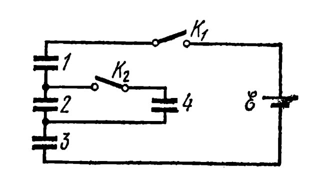


Рис. 25.

126. Решить предыдущую задачу при условии, что ключ K_1 замыкают и размыкают при замкнутом ключе K_2.

127. Два конденсатора C_1 и C_2, показанные на рис. 26, заряжаются следующим образом. Сначала замыкают и размыкают ключ K_1, затем замыкают ключ K_2. Определить разность потенциалов V_1 и V_2 на конденсаторах, если э. д. с. батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$.

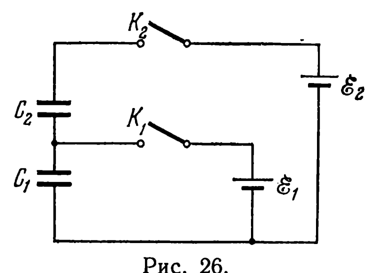


Рис. 26.

128. Три конденсатора с емкостями $C_1=2$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $C_3=4$ мкФ и допустимыми напряжениями $V_1=1000$ В, $V_2=450$ В, $V_3=250$ В соединены в батарею. При каком соединении конденсаторов можно получить наибольшее напряжение? Чему равно это напряжение и соответствующая емкость батареи?

129. Как известно, угол расхождения листочков электроскопа, соединенного с заряженным проводником, зависит от потенциала этого проводника. Какому условию должна удовлетворять электроемкость этого электроскопа, чтобы возможно точнее измерять потенциал проводника?

130. Две параллельные пластины ничтожно малой толщины заряжены одноименно, причем поверхностная плотность заряда на одной пластине $\sigma_1 = +1$ СГСЭ, а на другой $\sigma_2 = +2$ СГСЭ. Расстояние между пластинами $h = 1$ см мало по сравнению с линейными размерами пластин. Между пластинами вставлена парафиновая плоскопараллельная пластинка толщиной $d = 5$ мм (рис. 27). Диэлектрическая проницаемость парафина $\varepsilon = 2$. Определить разность потенциалов V (в вольтах) между пластинами.

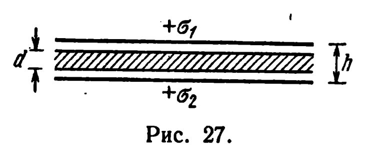


Рис. 27.

131. В условиях предыдущей задачи определить: 1) напряженность поля E_1 между пластинами вне диэлектрика; 2) напряженность поля E_2 внутри диэлектрика; 3) силу F, действующую на 1 см² пластины.

132. Для измерения заряда наэлектризованного проводника можно воспользоваться электрометром, который показывает разность потенциалов. Для этого прежде всего измеряют разность потенциалов V_1 между проводником и землей. Затем к проводнику присоединяют известную электроемкость C_0, вторая обкладка которой соединена с землей, и измеряют новую разность потенциалов V_2. Как из подобных измерений определить величину заряда? От чего зависит точность определения заряда?

133. Воздушный цилиндрический конденсатор состоит из проволоки диаметром 5 мм и коаксиального цилиндра диаметром 5 см. До какой разности потенциалов V можно зарядить этот конденсатор, если диэлектрическую прочность воздуха при заданных условиях можно считать равной $E = 30$ кВ/см?

134. Расстояние между обкладками плоского конденсатора равно d и заполнено двумя слоями диэлектриков. Толщина слоя первого диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_1 равна h_1. Диэлектрическая проницаемость второго диэлектрика равна ε_2. Площадь каждой обкладки равна S. Найти емкость C конденсатора.

135. Внутри плоского воздушного конденсатора, обкладки которого соединены между собой, помещена поляризованная пластинка из электрета толщины h. Поляризованность пластинки $\mathscr{P}$ перпендикулярна к ее боковым граням. Пренебрегая зависимостью поляризованности электрета $\mathscr{P}$ от электрического поля, определить напряженность и индукцию электрического поля внутри и вне пластинки,

если расстояние между обкладками конденсатора равно d.

136. Пространство между пластинами плоского конденсатора, расстояние между которыми равно d, заполнено диэлектриком. Найти емкость C конденсатора в двух случаях: 1) диэлектрик состоит из двух пластин одинаковой толщины, но с различными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2, причем пластины расположены параллельно пластинам конденсатора; 2) половина конденсатора заполнена одним диэлектриком, а вторая половина — другим, так что граница раздела между диэлектриками расположена перпендикулярно к пластинам конденсатора. Искажением поля у границы раздела пренебречь. Площадь пластины равна S. Показать, что в первом случае емкость конденсатора всегда меньше, чем во втором случае.

137. Между пластинами плоского конденсатора, площадь которых S, помещен слоистый диэлектрик, состоящий из n слоев вещества с диэлектрической проницаемостью ε_1 и из n слоев вещества с диэлектрической проницаемостью ε_2. Слои чередуются и каждый имеет толщину d. Найти емкость конденсатора C.

138. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от значения ε_1 у одной пластины до значения $\varepsilon_2<\varepsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d, площадь каждой из них равна S. Найти емкость C конденсатора.

139. К плоскому конденсатору, расстояние между пластинами которого d, присоединена батарея, поддерживающая постоянной разность потенциалов V. В конденсатор вводят диэлектрик, заполняющий все пространство между пластинами. Диэлектрическая проницаемость этого диэлектрика ε. Насколько изменится плотность электрического заряда на пластинах конденсатора?

140. Какова напряженность поля E в воздушном зазоре плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами $V=200$ В? Расстояние между пластинами $d=0,2$ см, и между ними находится лист стекла ($\varepsilon=7$) толщиной $h=0,1$ см.

141. Сферический конденсатор наполовину заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Радиусы поверхностей: внутренней $R_1=5$ см, внешней $R_2=6$ см (рис. 28). Определить емкость C конденсатора, пренебрегая искривлением линий поля на границе диэлектрика.

142. Найти напряженность электрического поля между обкладками сферического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 29). Диэлектрики граничат между собой вдоль поверхности конуса с вершиной в центре O. Телесный угол конуса, заполненного

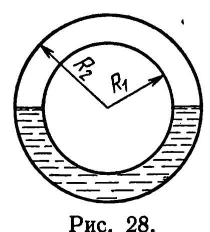


Рис. 28.

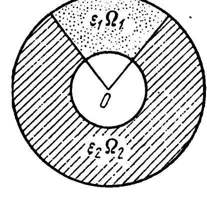


Рис. 29.

первым диэлектриком, равен Ω_1, а заполненного вторым диэлектриком — Ω_2 ($\Omega_1+\Omega_2=4\pi$). Заряд на внутренней обкладке равен Q. Найти также емкость конденсатора, если радиусы шаровых обкладок равны R_1 и R_2 ($R_1<R_2$).

143. Найти напряженность электрического поля между обкладками длинного цилиндрического конденсатора, пространство между которыми заполнено однородными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 30). Диэлектрики граничат между собой вдоль плоскостей, пересекающихся на оси цилиндров O. Двугранные углы, образуемые ими в диэлектриках, равны соответственно φ_1 и φ_2 ($\varphi_1+\varphi_2=2\pi$). Длина конденсатора равна l, а заряд на внутренней обкладке Q. Найти также емкость C конденсатора, если радиусы цилиндрических обкладок равны R_1 и R_2 ($R_1<R_2$).

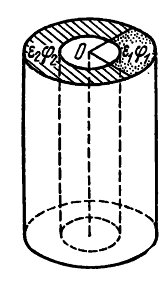


Рис. 30.

144. Найти поле между обкладками сферического конденсатора, если радиус внутреннего шара $R_1=5$ см, а внешнего $R_2=7$ см; пространство между шарами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=5$; на внутреннем шаре находится заряд $Q=5000$ СГСЭ.

145. В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется однородное поле напряженностью $\boldsymbol{E}$. Внутри среды находится сферическая полость. Найти напряженность поля $\boldsymbol{E}'$ в центре сферы, созданного зарядами, индуцированными на поверхности сферы, считая, что

поляризованность $\mathscr{P}$ всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение.

Указание. Поверхностная плотность индуцированных зарядов σ на границе диэлектрика равна величине поляризованности $\mathscr{P}$, умноженной на $\cos\theta$, где θ — угол между нормалью $\boldsymbol{N}$ к поверхности и вектором $\mathscr{P}$ (рис. 31). Найти напряженность поля в центре сферы, создаваемую индуцированным зарядом на элементе поверхности сферы, и проинтегрировать ее затем по всей сфере.

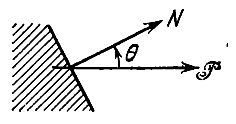


Рис. 31.

146. Показать, что взаимная емкость двух концентрических сферических поверхностей, достаточно удаленных от поверхности земли и других проводников, при заземленной внутренней сфере может быть выражена формулой $C = R_2^2/(R_2 - R_1)$, где R_2 и R_1 — соответственно радиусы внешней и внутренней сфер.

147. Цилиндрический конденсатор, радиус одной обкладки которого вдвое больше радиуса другой, заряжен до разности потенциалов V. Найти напряженность электрического поля E в точке, находящейся на расстоянии d от оси цилиндра.

148. Конденсатор присоединен к источнику постоянного напряжения (батарее). Изменится ли напряженность электрического поля в конденсаторе, если его заполнить диэлектриком?

149. В пространстве между пластинами плоского конденсатора имеется однородный поток электронов, который создает равномерный объемный заряд. Расстояние между пластинами равно d. Потенциал одной из пластин равен φ_0. При каком значении объемной плотности заряда ρ потенциал и напряженность поля у другой пластины равны нулю?

150. Внутренняя обкладка цилиндрического конденсатора радиуса R_2 имеет потенциал φ_0. Внешняя обкладка радиуса R_1 заземлена. Между обкладками конденсатора имеется заряд с постоянной объемной плотностью ρ. Найти распределение потенциала φ между обкладками конденсатора.

151. В пространство между обкладками заряженного плоского конденсатора вдвигают параллельно обкладкам пластину из диэлектрика. Какие силы действуют на ту часть диэлектрической пластины, вблизи которой можно считать поле однородным?

152. Бесконечно тонкая диэлектрическая палочка равномерно заряжена электричеством с постоянной линейной

плотностью. Показать, что эквипотенциальными поверхностями поля такой палочки являются софокусные эллипсоиды, фокусы которых находятся на ее концах.

153. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена плоскопараллельная пластина из твердого диэлектрика, так что между ней и пластинами конденсатора остались воздушные зазоры. Как изменится при этом сила притяжения между пластинами конденсатора?

154. Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена диэлектрическая пластина толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 32). Конденсатор частично погружен в жидкость с диэлектрической проницаемостью ε_1 и плотностью τ. Найти высоту поднятия жидкости в конденсаторе h, пренебрегая капиллярными явлениями, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов V. Суммарная толщина столбов жидкости в конденсаторе равна l_1.

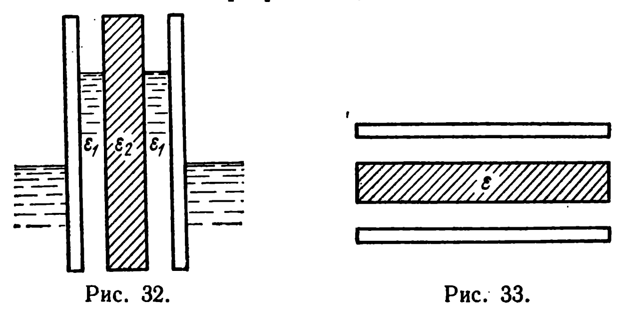


Рис. 32. Рис. 33.

155. Диэлектрическая пластина толщины l_2 с диэлектрической проницаемостью ε введена между обкладками плоского воздушного конденсатора (рис. 33). Между поверхностями пластины и обкладками конденсатора остались воздушные зазоры, суммарная толщина которых равна l_1. Определить силу притяжения F между обкладками, если разность потенциалов между ними равна V, а площадь пластин S. Во что переходит выражение для F в предельном случае $l_1 \to 0$?

156. Капиллярный вольтметр состоит из капиллярной стеклянной трубочки с металлизированной полупрозрачной внутренней поверхностью, служащей одной из обкладок цилиндрического конденсатора. Второй обкладкой является тонкая металлическая проволока, коаксиальная с внутренней цилиндрической поверхностью трубочки. Определить

поднятие мениска воды h в вольтметре при наложении на обкладки напряжения $V=100$ В, если внутренний диаметр капилляра $D_1=0,5$ мм, диаметр проволоки $D_2=0,05$ мм, плотность воды $\tau=1$ г/см³.

157. На обкладках плоского конденсатора находятся заряды $+q$ и $-q$. Площадь обкладок S. Какую работу A смогут совершить обкладки, сблизившись с расстояния d_0 до расстояния d? За счет какой энергии совершается эта работа?

158. Вычислить электростатическую энергию заряда на шаре радиуса R в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

159. Сделать тот же расчет для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

160. Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 34). Все пластины имеют форму полукруга радиуса R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент сил M, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

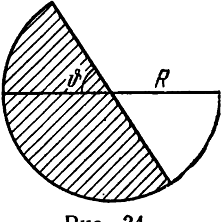


Рис. 34.

161. В предыдущей задаче величина момента сил M не зависит от угла поворота ϑ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\vartheta=0$, момент M должен обращаться в нуль. Объяснить это расхождение.

162. С какой объемной плотностью ρ следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле E внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину?

163. С какой поверхностной плотностью $\sigma(\vartheta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиуса R (рис. 35), чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

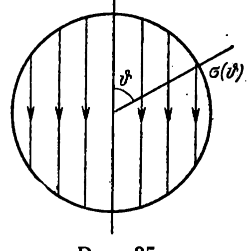


Рис. 35.

164. К полюсам батареи присоединены обкладки плоского конденсатора. Для раздвижения пластин конденсатора необходимо совершить работу. Как меняется с расстоянием потребляемая мощность, если разводить пластины равномерно? На что затрачивается работа, совершаемая при раздвижении пластин конденсатора? Что происходит с начальной электростатической энергией конденсатора?

165. Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов V и отсоединен от источника э. д. с. Площадь пластин S, расстояние между ними d. Пластины конденсатора расположены вертикально. Снизу подводят сосуд с жидким диэлектриком, имеющим диэлектрическую проницаемость ε, так что диэлектрик заполняет половину конденсатора. 1) Чему равна емкость конденсатора C? 2) Чему равна напряженность поля E в воздушной части промежутка между пластинами и в части, заполненной диэлектриком? 3) Как распределена поверхностная плотность σ электричества в пластине? 4) Определить уменьшение энергии конденсатора ΔW и на что она была израсходована. Считать, что граница жидкость — воздух плоская и все параметры конденсатора изменяются скачком.

166. Внутри плоского конденсатора с площадью пластин 200 см^2 и расстоянием между ними 0,1 см находится пластина из стекла ($\varepsilon=5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить стеклянную пластину? Решить задачу при двух условиях: 1) конденсатор все время присоединен к батарее с э. д. с., равной 300 В; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, а затем отключен, и только после этого пластина была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

167. Подвижные пластины конденсатора переменной емкости стоят в некотором среднем положении. Какой момент сил M действует (вследствие взаимодействия зарядов) на систему подвижных пластин конденсатора при разности потенциалов $V=300$ В, если число «рабочих» промежутков между пластинами конденсатора $n=20$ [1]), каждая пластина имеет форму полукруга радиуса $R=8$ см и расстояние между пластинами $d=0,5$ мм?

168. Пластинка кварца растягивается силой $F_н=0,1$ кгс. На боковых поверхностях, перпендикулярных к электриче-

---

[1]) Неподвижных пластин 11 подвижных — 10.

ской оси кристалла, имеются металлические обкладки A и B шириной $a=3$ см (рис. 36), толщина пластинки $d \ll a$. Обкладки соединены с электрометром, емкость которого мала по сравнению с емкостью плоского конденсатора, образованного обкладками A и B. Электрометр показывает, что под влиянием нагрузки $F_н$ на обкладках A и B возникает разность потенциалов $V=1{,}8$ В. Диэлектрическая проницаемость кварца $\varepsilon = 4{,}5$. Определить пьезоэлектрическую постоянную α кварца.

169. Капля жидкости заряжена электричеством. Найти зависимость упругости насыщенного пара над поверхностью

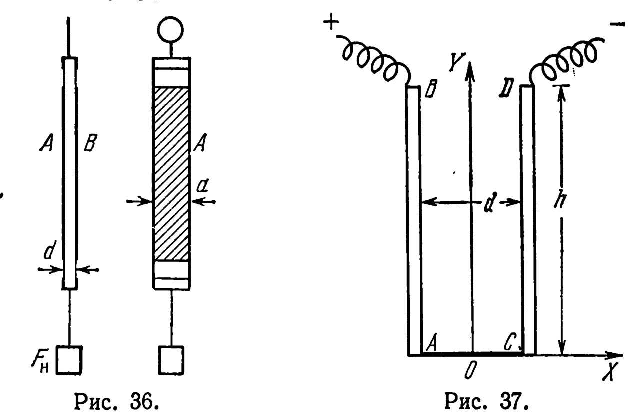


Рис. 36.

Рис. 37.

капли от ее заряда q. Используя полученный результат, объяснить принцип действия камеры Вильсона.

170. Параллельные длинные однородные пластины AB и CD (рис. 37) сделаны из материала, плохо проводящего электричество (например, из дерева). Боковые края их A и C накоротко соединены хорошим проводником (например, металлом), а между краями B и D поддерживается постоянное напряжение V. Найти напряженность электрического поля и форму электрических силовых линий между пластинами, пренебрегая краевыми эффектами. Расстояние между пластинами равно d, а ширина каждой из них $AB=CD=h$.

171. Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от $\varepsilon_1=4$, $\lambda_1=10^{-9}$ См/см на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2=3$, $\lambda_2=10^{-12}$ См/см на другой его поверхности. Конден-

сатор включен в цепь батареи постоянной э. д. с. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $I=10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик в направлении от стороны *1* к стороне *2*.

172. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость первого диэлектрика равны соответственно ε_1 и λ_1, второго ε_2 и λ_2. Найти плотность поверхностных свободных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая установится при наложении на конденсатор постоянного напряжения V.

173. Свободная энергия Ψ, термодинамический потенциал Φ и энтальпия I изотропного диэлектрика определяются выражениями

$$\Psi=U-TS, \quad \Phi=\Psi-\frac{1}{4\pi}ED,$$

$$I=U-\frac{1}{4\pi}ED,$$

где U — внутренняя энергия, а S — энтропия диэлектрика. (В дальнейшем предполагается, что объем диэлектрика V постоянен и равен единице.) Показать, что для всякого бесконечно малого квазистатического процесса выполняются соотношения

$$d\Psi=-S\,dT+\frac{1}{4\pi}E\,dD,$$

$$d\Phi=-S\,dT-\frac{1}{4\pi}D\,dE,$$

$$dI=T\,dS-\frac{1}{4\pi}D\,dE.$$

174. Найти выражение для плотности свободной энергии диэлектрика.

175. Найти выражение для плотности внутренней энергии диэлектрика.

176. Показать, что для диэлектриков с «квазиупругими» молекулами внутренняя энергия совпадает со свободной энергией.

177. Вычислить плотность внутренней и свободной энергии для полярных газообразных диэлектриков с «твердыми» диполями.

178. Найти разность между теплоемкостями единицы объема диэлектрика при постоянной индукции C_D и постоянной напряженности электрического поля C_E. Как осуществить нагревание при постоянном D и при постоянном E?

179. Найти изменение температуры диэлектрика при его квазистатической адиабатической поляризации (электрокалорический эффект). Объем диэлектрика во время поляризации поддерживается постоянным.

180. Определить изменение температуры газообразного полярного диэлектрика с «твердыми» диполями при квазистатическом адиабатическом выключении электрического поля, если объем газа во время процесса поддерживается постоянным. Дипольный момент молекулы газа $p = 10^{-18}$ СГСЭ, постоянная адиабаты газа $\gamma = 1,4$, начальная температура $T = 100$ К, начальная напряженность электрического поля $E = 100$ СГСЭ$= 3 \cdot 10^6$ В/м.

181. Показать, что вблизи абсолютного нуля температуры выполняется соотношение

$$\lim_{T \to 0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = 0.$$

182. Прямой пьезоэлектрический эффект состоит в том, что при механических деформациях пьезоэлектрический кристалл (например, кварц) электризуется (приобретает электрический момент). Обратный пьезоэлектрический эффект, напротив, заключается в том, что при наложении электрического поля кристалл деформируется. Исходя из законов термодинамики, показать, что из существования прямого (обратного) эффекта следует и существование обратного (прямого) эффекта. Доказательство провести на примере пластинки кварца с длиной l, шириной b и толщиной h (рис. 38). Пластинка вырезана таким образом, что при ее сжатии или растяжении вдоль оси X появляются электрические заряды на гранях, перпендикулярных к той же оси (продольный эффект). Заряды на тех же гранях возникают также при сжатии или растяжении пластинки вдоль оси Y (поперечный эффект). При сжатии или растяжении вдоль оси Z пьезоэффект не наблюдается.

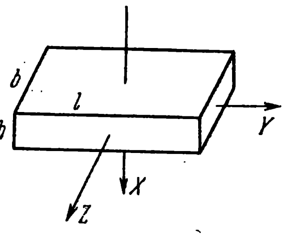


Рис. 38.

§ 2. Законы постоянного тока

183. Каково сопротивление R отрезка медного провода диаметром 2 мм, если масса всего отрезка 0,893 кг? Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}017\cdot10^{-4}$ Ом·см и плотность $\tau=8{,}93$ г/см³.

184. В созданных А. Н. Лодыгиным первых электрических лампах накаливания (1872 г.) накаливался угольный стерженек. Подсчитать мощность, потребляемую шестивольтовой лампочкой Лодыгина, если угольный стерженек имел длину 6 см и диаметр 2 мм. Удельное сопротивление угля при температуре 0 °С $\rho=7\cdot10^{-3}$ Ом·см и температурный коэффициент сопротивления $\alpha=-2\cdot10^{-4}$ °С$^{-1}$. Нормальная температура накала стерженька 1600 °С.

185. На цоколе лампочки накаливания с вольфрамовой нитью накала написано: 120 В, 60 Вт. При измерении сопротивления этой лампочки в холодном состоянии на мостике Уитстона оказалось, что оно равно всего 20 Ом. Какова нормальная температура накала нити, если температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=5\times10^{-3}$ °С$^{-1}$?

186. Сопротивление электролампочки 120 В, 100 Вт в накаленном состоянии больше, чем в холодном, в 10 раз. Найти ее сопротивление R в холодном состоянии и температурный коэффициент сопротивления α, если температура накала нити 2000 °С.

187. Какой следует взять диаметр D медного провода, чтобы падение напряжения на нем на расстоянии 1,4 км равнялось 1 В при токе в 1 А?

188. Ленц для своих опытов, в которых он впервые точно установил закон, выражающий количество тепла, выделенное током (закон Джоуля — Ленца), пользовался сосудом, наполненным спиртом, в который погружена платиновая спираль. Пропуская ток через спираль и измеряя время, за которое температура спирта поднимается на градус, Ленц установил количество тепла, выделенное током. Найти скорость повышения температуры в приборе Ленца, если провод платиновой спирали имел длину $l=40$ см, диаметр $D=1$ мм; к спирали было подведено напряжение $V=1{,}1$ В, а масса спирта в сосуде $m=1$ кг. Удельное сопротивление платины при рабочей температуре $\rho=0{,}12\cdot10^{-4}$ Ом·см, удельная теплоемкость спирта $c=0{,}6$ кал/(г·°С). Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Почему Ленц пользовался спиртом, а не водой?

189. Электрическая цепь составлена из трех кусков провода одинаковой длины и сделанных из одинакового материала, соединенных последовательно. Сечение всех трех кусков различно: 1, 2, 3 мм². Разность потенциалов на концах цепи равна 12 В. Определить падение напряжения V на каждом проводнике.

190. Цепь составлена из девяти проводников, образующих шестиугольник с диагоналями, исходящими из одной и той же вершины (рис. 39). Сопротивление каждого из проводов равно r. Определить сопротивление R всей цепи между точками A и B.

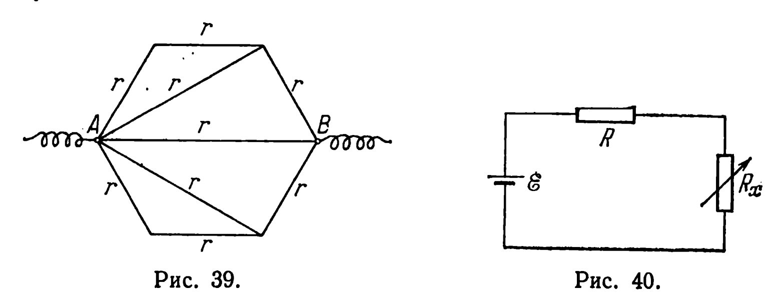


Рис. 39. Рис. 40.

191. Составлена цепь, показанная на рис. 40, где R_x — переменное сопротивление. Начертить график зависимости силы тока от сопротивления R_x. Величины $\mathscr{E}$ и R известны. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

192. Батарея гальванических элементов с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнута на внешнее сопротивление R. Построить график изменения напряжения V во внешней цепи в зависимости от R.

193. Батарея включена на сопротивление $R_1=10$ Ом и дает ток силой $I_1=3$ А. Если ту же батарею включить на сопротивление $R_2=20$ Ом, то сила тока будет $I_2=1{,}6$ А. Найти э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление батареи r.

194. Шкала вольтметра, схема которого приведена на рис. 41, имеет 150 делений. Вольтметр имеет четыре клеммы, рассчитанные на измерения напряжения до 3, 15, 150 В. Стрелка прибора отклоняется на 50 делений при прохождении через него тока силой в 1 А. Каково внутреннее сопротивление прибора при включении его на различные диапазоны измерений?

195. Для определения величины некоторого переменного сопротивления R_x была собрана цепь, состоящая из батареи

с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r_1, переменного сопротивления R_x и амперметра с внутренним сопротивлением r_2 (рис. 42). Оценить точность измерения сопротивления R_x, т. е. установить связь между ошибкой измерения тока ΔI и ошибкой определения сопротивления ΔR_x, если деления шкалы прибора пропорциональны току I.

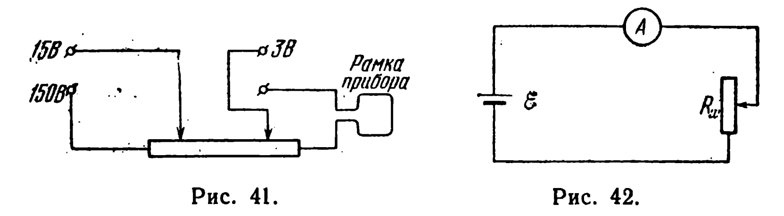


Рис. 41. Рис. 42.

196. Схема омметра, предназначенного для приблизительных измерений сопротивления, показана на рис. 43. Измерительный прибор A имеет сопротивление $r=2{,}5$ кОм, шкалу на 100 делений с ценой 0,5 мкА. Указанные на схеме сопротивления имеют следующие значения: $R_1=1$ Ом, $R_2=$ $=24$ Ом, $R_0=20$ кОм, $R_3=7$ кОм, $R_4=15$ кОм. Внутреннее сопротивление батареи ничтожно мало.

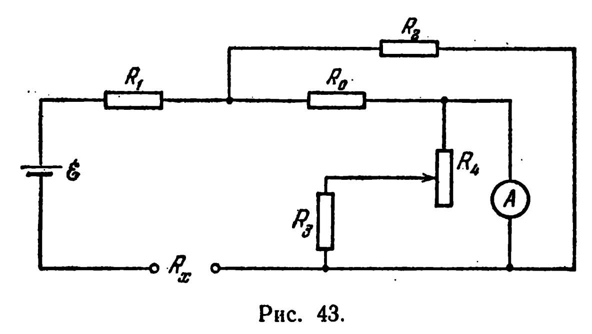


Рис. 43.

1) Определить сопротивление шунта прибора при напряжении батареи $\mathscr{E}=1{,}5$ В, которое подбирается из условия: при замкнутых накоротко клеммах омметра стрелка прибора отклоняется на 100 делений.

2) При уменьшении напряжения батареи ($\mathscr{E}<1{,}5$ В) можно изменением шунта «установить нуль» омметра, т. е. добиться того, чтобы при $R_x=0$ стрелка прибора все равно показывала 100 делений. Определить, до какой величины может понизиться напряжение батареи.

3) Указать величину сопротивления R_x, соответствующего n делениям шкалы. Установить связь между шкалами измерительного прибора и омметра.

4) Найти ошибку при определении сопротивления, если надежный отсчет можно сделать только с точностью до половины деления шкалы.

5) Каким образом следует изменить величины сопротивлений R_1 и R_2, чтобы расширить диапазон измеряемых сопротивлений R_x в 10 раз, т. е. чтобы значение сопротивления по шкале омметра было в 10 раз меньше значения R_x?

197. Каково будет отношение плеч l_1 и l_2 при равновесии в мостике Уитстона, изображенном схематически на рис. 44, если в другие плечи его включены показанные на рисунке электрические лампы? При каких условиях можно ответить на этот вопрос, имея в своем распоряжении только данные, указанные на цоколях лампы?

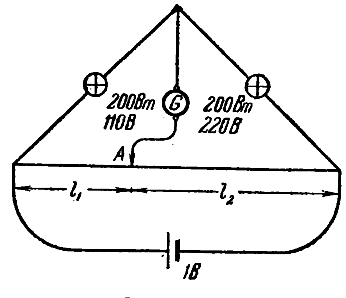


Рис. 44.

198. К мостику Уитстона приложено напряжение V. Гальванометр имеет сопротивление r и показывает ток I, когда в плечи мостика включены сопротивления R_x, R_1, R_2, R_3. Найти неизвестное сопротивление R_x.

199. Найти сопротивление R между точками A и B для цепи, показанной на рис. 45. Сопротивления отдельных ветвей указаны на рисунке.

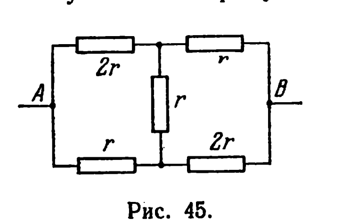


Рис. 45.

Рис. 46.

200. Точность измерения сопротивлений мостиком Уитстона наибольшая, когда сопротивления соседних плеч равны, т. е. когда $R_1 = R_2$ (рис. 46). Доказать это для случая, когда сопротивление гальванометра очень велико и поэтому током через гальванометр можно пренебречь.

У к а з а н и е. Найти связь между относительным изменением R_x и изменением напряжения на гальванометре ΔV.

201. Нарушится ли равновесие мостика Уитстона, если поменять местами источник тока и гальванометр? Изменится ли при этом чувствительность измерительной схемы?

202. В мостике Уитстона (см. рис. 44) положение на шкале ползунка A, соединенного со струной (реохордом), позволяет сразу определить искомое сопротивление в омах, если в правую ветвь мостика включено постоянное сопротивление 1 Ом. Каким сопротивлениям R_x отвечают положения ползунка на расстоянии: 1/3, 2/3, 5/6 длины L струны от левого края, а также где помещается ползунок, если искомое сопротивление R_x равно 1 и 10 Ом? Построить соответствующий график. Найти абсолютную и относительную погрешность определения сопротивления, если полагать, что имеется постоянная погрешность определения положения ползунка A, которая составляет 0,1% длины реохорда.

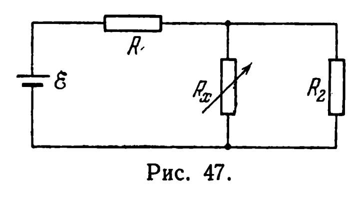


Рис. 47.

203. Составлена цепь, показанная на рис. 47, где R_x — переменное сопротивление. Начертить график зависимости силы тока, текущего через R_1, от сопротивления R_x. Величины $\mathscr{E}$, R_1 и R_2 известны.

204. Какой шунт $r_ш$ нужно присоединить к стрелочному гальванометру со шкалой в 100 делений, ценой деления 10^{-6} А и внутренним сопротивлением гальванометра 150 Ом, чтобы им можно было пользоваться для измерения сил токов до 1 мА?

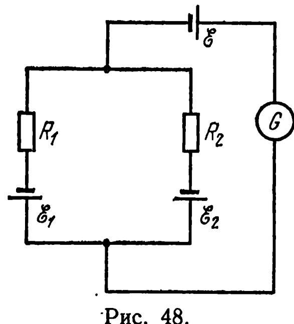


Рис. 48.

205. Сопротивления R_1 и R_2 (рис. 48) подобраны так, что ток через гальванометр G не идет. Считая известными э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, найти э. д. с. $\mathscr{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь по сравнению с R_1 и R_2.

206. Сопротивления R_1, R_2, R_3 (рис. 49) подобраны так, что ток через гальванометр G не идет. Э. д. с. батарей $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3$ известны. Считая известными сопротивления R_1, R_2, R_3 и пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти э. д. с. $\mathscr{E}_2$ и ток I_1, текущий через батарею $\mathscr{E}_1$.

207. Через вольтметр со шкалой на 100 В протекает ток 0,1 мА, и стрелка отклоняется на 1 В шкалы. Если к нему присоединить добавочное сопротивление 90 кОм, то какую наибольшую разность потенциалов V можно будет измерять этим прибором?

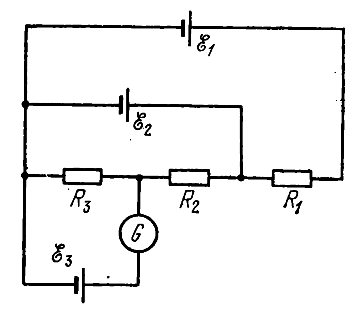


Рис. 49.

208. Батарея аккумуляторов с э. д. с. $\mathscr{E}=6$ В замкнута на два последовательно соединенных реостата, каждый сопротивлением $r=5000$ Ом. Что покажет вольтметр, присоединенный к клеммам одного реостата, если сопротивление вольтметра: 1) $R=100\,000$ Ом; 2) $R=10\,000$ Ом (внутреннее сопротивление батареи мало́)?

209. В плоский конденсатор заданных размеров вдвигается с постоянной скоростью v пластина диэлектрика (рис. 50). Определить ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору.

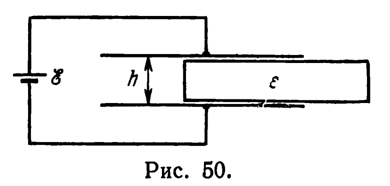


Рис. 50.

210. Две плоские прямоугольные пластины образуют конденсатор. Между пластинами без трения может двигаться пластина твердого диэлектрика (рис. 51). Какую мощность затрачивает батарея, включенная в цепь конденсатора, и как распределяется эта мощность между электрической и механической энергиями при втягивании диэлектрика?

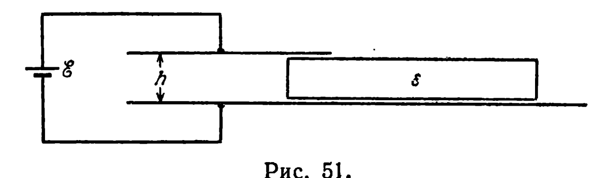


Рис. 51.

211. Вольтметр при включении между зажимами цепи, присоединенной к источнику постоянного тока, показывает разность потенциалов 50 В; другой вольтметр между теми же точками показывает 51 В, а электростатический вольтметр показывает 52 В. Электростатический вольтметр, вклю-

ченный при разомкнутой цепи, показывал 65 В. Определить сопротивление цепи, внутреннее сопротивление источника и сопротивление второго вольтметра, если первый имеет сопротивление 6500 Ом.

212. N одинаковых элементов с э. д. с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r разделены на m групп по n элементов в группе. Элементы в каждой группе соединены параллельно одноименными полюсами, а сами группы соединены между собой последовательно. При каком условии ток в цепи (при заданном внешнем сопротивлении R) будет максимальным?

213. Три гальванических элемента с э. д. с. $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$ и внутренними сопротивлениями r_1, r_2, r_3 соединены по схеме, указанной на рис. 52. Сопротивления соединяющих проводов пренебрежимо малы. 1) Какое напряжение V будет показывать вольтметр, включенный так, как указано на этом рисунке? 2) Чему будет равно показание вольтметра, если величины $\mathcal{E}_i$ и r_i связаны соотношением $\mathcal{E}_1/r_1=\mathcal{E}_2/r_2=\mathcal{E}_3/r_3$?

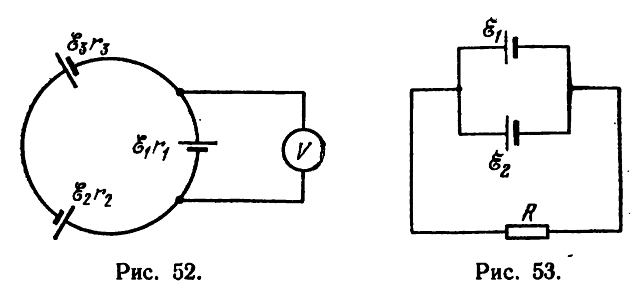


Рис. 52. Рис. 53.

214. По ошибке в цепь были включены параллельно два гальванических элемента с разными э. д. с. $\mathcal{E}_1=1{,}9$ В и $\mathcal{E}_2=1{,}1$ В и с внутренними сопротивлениями $r_1=0{,}1$ Ом и $r_2=0{,}8$ Ом. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R=10$ Ом (рис. 53). Чему равны токи I_1 и I_2 через элементы, как они направлены и как велико напряжение V на сопротивлении R внешней цепи?

215. Электромагнитный прибор с ценой деления I_0 (в амперах) и внутренним сопротивлением r употребляется как вольтметр с добавочным сопротивлением R. Какова будет цена его деления в вольтах?

216. Имеется прибор с ценой деления 10 мкА. Шкала прибора имеет 100 делений, внутреннее сопротивление

100 Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до 100 В или амперметр для измерения тока до 1 А?

217. Батарея с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнута на два сопротивления R_1 и R_2, включенные параллельно друг другу. Найти: 1) ток I через батарею; 2) ток I_1 через сопротивление R_1; 3) во сколько раз изменится ток I_1, если разорвать сопротивление R_2 (рассмотреть частный случай, когда $r \ll R_1$).

218. От сети с постоянным напряжением 120 В нужно питать прибор, рассчитанный на напряжение 20 В, и при этом требуется, чтобы при изменении сопротивления прибора от 100 до 90 Ом разность потенциалов на нем менялась не более чем на 1%. Можно ли это сделать с помощью потенциометра?

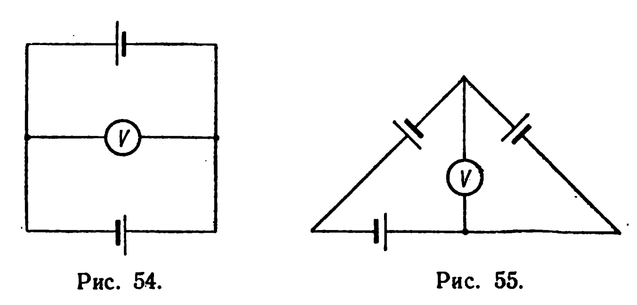


Рис. 54. Рис. 55.

219. В схему включены два одинаковых гальванических элемента с э. д. с. 1,5 В и внутренним сопротивлением 2 Ом так, как показано на рис. 54. Какой ток проходит через элементы? Что покажет вольтметр? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

220. Что покажет вольтметр в предыдущей задаче, если внутреннее сопротивление одного гальванического элемента равно 3 Ом, а другого 1 Ом?

221. Что покажет вольтметр, если его включить вместе с тремя одинаковыми гальваническими элементами так, как показано на рис. 55? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

222. Найти условие, при котором ток, даваемый двумя соединенными последовательно разными гальваническими элементами, обладающими соответственно э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2, будет меньше тока, даваемого первым из них, если они будут включены на одно и то же внешнее сопротивление R.

223. При каких соотношениях между сопротивлениями r, R_x и R в схеме, изображенной на рис. 56, прибор будет показывать практически очень малое изменение силы тока при значительных изменениях сопротивления R_x? Внутреннего сопротивления источника не учитывать.

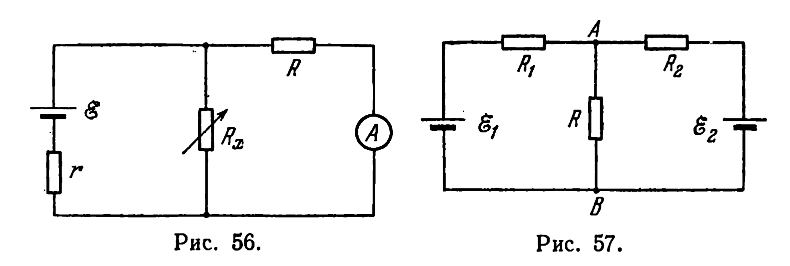


Рис. 56. Рис. 57.

224. В цепи, изображенной на рис. 57, батареи включены навстречу, их э. д. с. $\mathscr{E}_1=1{,}5$ В и $\mathscr{E}_2=1$ В. Сопротивления $R=100$ Ом, $R_1=50$ Ом и $R_2=80$ Ом. Найти силу тока, идущего через сопротивление R.

225. Каково должно быть соотношение между сопротивлениями и э. д. с. в цепи, указанной на рис. 57, при котором через вторую батарею не будет течь ток?

226. Сопротивления цепи, данные которой приведены на рис. 58, подобраны так, что ток через батарею с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ не идет. Чему равны напряжение V_2 на зажимах сопротивления R_2 и сила тока I_3 через сопротивление R_3? Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

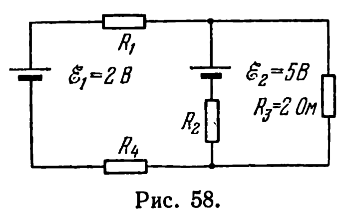


Рис. 58.

227. В условиях предыдущей задачи чему равны сопротивления R_2, R_1 и R_4?

228. Батарея с э. д. с. $\mathscr{E}$ замкнута на снабженный ползунком реохорд, имеющий длину l и сопротивление R. К концу реохорда и к ползунку подключен вольтметр с внутренним сопротивлением r. Как зависят показания вольтметра от положения ползунка на реохорде?

229. За неимением одинаковых гальванических элементов пришлось включить параллельно два гальванических элемента с э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и с внутренними сопротивлениями r_1 и r_2. Они дают ток во внешнюю цепь, сопротивление которой R. Найти э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r такого

гальванического элемента, который дает во внешнюю цепь такой же ток при любом сопротивлении R, и показать, что $\mathscr{E}$ всегда меньше наибольшей из э. д. с. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$.

230. В цепи, схема которой изображена на рис. 59, известны сопротивления R_1, R_2, R_3 и ток I_3 через сопротивление R_3. Определить токи I_1 и I_2 через сопротивления R_1 и R_2 и э. д. с. $\mathscr{E}$ батареи.

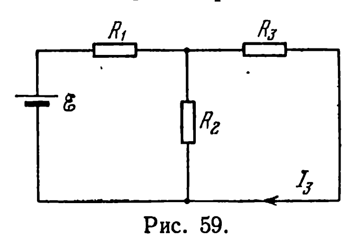


Рис. 59.

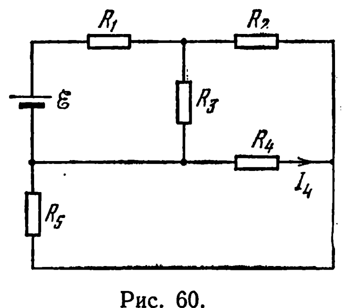


Рис. 60.

231. В цепи, схема которой приведена на рис. 60, известны все сопротивления и сила тока I_4 через сопротивление R_4. Найти э. д. с. $\mathscr{E}$ батареи. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

232. В цепи постоянного тока (рис. 61) $\mathscr{E}=10$ В, $R_1=5$ Ом, $R_2=R_3=1$ Ом, $R_4=R_5=3$ Ом. Найти силы токов в каждой ветви. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

233. Чему равна э. д. с. $\mathscr{E}$ батареи (в схеме рис. 61 и при величинах сопротивлений, указанных в предыдущей задаче), если известно, что ток через батарею равен 3,24 А?

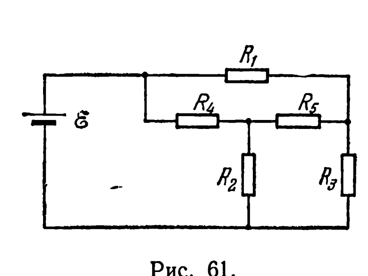



Рис. 61.

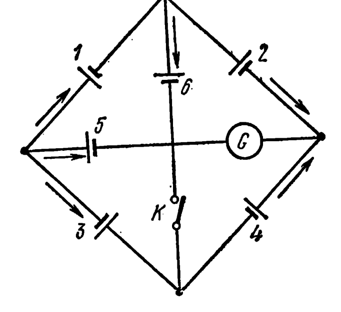


Рис. 62.

234. В боковые стороны и диагонали схемы мостика Уитстона включены источники тока с произвольными э. д. с. (рис. 62). Сопротивления этих сторон и диагоналей, включая

внутренние сопротивления источников тока, равны соответственно R_1, R_2, ..., R_6. При каком условии замыкание и размыкание ключа в диагонали *6* не влияет на показание гальванометра, включенного в диагональ *5*?

235. В предыдущей схеме (рис. 62) гальванометр из диагонали *5* перенесен в боковую сторону *1*, а ключ *K* — в противоположную боковую сторону *4*. При каком условии замыкание и размыкание ключа не будет влиять на показания гальванометра?

236. В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 63, известны сопротивления R_1, R_2 и R_3, сила тока I через батарею и разность потенциалов V_{21} между точками *2* и *1*. Найти величину сопротивления R_4.

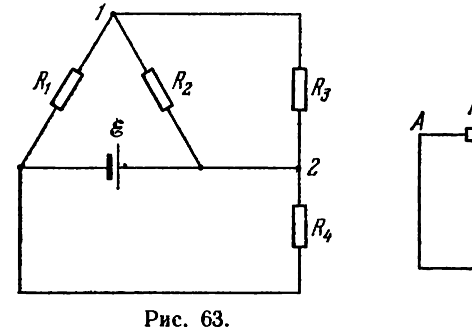


Рис. 63.

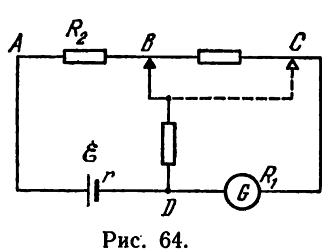


Рис. 64.

237. Для определения внутреннего сопротивления r гальванического элемента можно воспользоваться схемой рис. 64, в которой гальванометр *G* с известным сопротивлением R_1 дает одинаковые отклонения стрелки, будет ли подвижный контакт находиться в *B* или в *C*, причем сопротивление *AB* для этой цели специально подбирается. Пусть сопротивление *AB* известно и равно R_2. Чему равно внутреннее сопротивление r гальванического элемента?

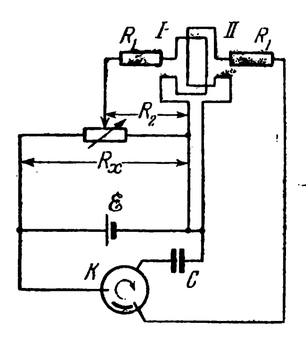


Рис. 65.

238. Рамка гальванометра магнитоэлектрической системы обладает двумя идентичными обмотками, так что при пропускании одного и того же тока по этим обмоткам в разных направлениях гальванометр остается на нуле

(рис. 65). Каждая из обмоток вместе с добавочным сопротивлением к ней имеет сопротивление $R_1=150\,000$ Ом. Обмотка I включена параллельно сопротивлению R_2, составляющему часть реостата с сопротивлением $R_x=10\,000$ Ом и присоединенному к гальваническому элементу, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь. С помощью вращающегося коммутатора K заряжают от того же элемента $n=40$ раз в секунду конденсатор C и разряжают последний с той же частотой через обмотку II гальванометра в направлении, противоположном току, идущему через обмотку I. Сопротивление R_2 регулируют так, чтобы гальванометр оставался на нуле; при этом $R_2=3000$ Ом. Чему равна емкость конденсатора C?

239. На телеграфной однопроводной линии имеется повреждение с определенным сопротивлением заземления r (рис. 66). Показать, что ток I на принимающем конце линии

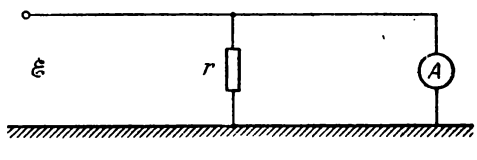


Рис. 66.

будет наименьшим в том случае, когда повреждение произошло в середине линии. Сопротивление приемного аппарата мало по сравнению с сопротивлениями всей линии.

240. Как устроить освещение одной лампочкой коридора, чтобы человек, входящий с любого конца коридора, мог включить или выключить лампочку, висящую посередине коридора, независимо от того, в каком положении находится переключатель на другом конце коридора?

241. Тело из плохого проводника имеет форму цилиндрической трубки. Длина трубки l, внутренний и внешний радиусы поверхностей r_1 и r_2, удельное сопротивление вещества трубки ρ. Цилиндрические поверхности трубки покрыты обкладками из идеального проводника, и между обкладками создана некоторая разность потенциалов, вследствие чего через стенку трубки идет ток. Найти сопротивление тела R.

242. Шаровой слой, образованный концентрическими сферами из идеального проводника, заполнен веществом с удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление R

этого шарового слоя, если его внешний радиус r_1, а внутренний r_2?

243. Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей все пространство между двумя идеально проводящими оболочками произвольной формы, равно $\rho/(4\pi C)$, где ρ — удельное сопротивление среды, а C — взаимная емкость этой системы электродов-оболочек в вакууме.

244. Два металлических шара одинакового радиуса r погружены в однородную среду с удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление R среды между шарами? Считать, что расстояние между шарами очень велико по сравнению с их радиусами.

245. Два электрода A_1 и A_2 произвольной формы глубоко зарыты в землю и соединены между собой воздушным проводом (телеграфная линия). Электроды находятся далеко друг от друга. Емкости электродов (в вакууме) равны соответственно C_1 и C_2. Почву в окрестности каждого электрода можно считать однородной. Найти сопротивление земли R между электродами, если удельные сопротивления почвы в окрестности электродов равны соответственно ρ_1 и ρ_2.

246. Сравнить напряжения V на клеммах, а также мощности N, развиваемые во внешней цепи следующими двумя генераторами тока: 1) батареей из $n=50$ элементов, соединенных последовательно и имеющих каждый э. д. с. $\mathcal{E}_1=2$ В, причем внешняя цепь имеет сопротивление $R_1=200$ Ом, а внутреннее сопротивление элемента $r_1=0{,}2$ Ом; 2) электрофорной машиной с несколькими дисками, создающей на шаровых кондукторах разность потенциалов $\mathcal{E}_2=100\,000$ В и обладающей внутренним сопротивлением $r_2=10^8$ Ом, когда ее приключают к внешней цепи с сопротивлением $R_2=10^5$ Ом. Как изменятся силы токов и мощности во внешней цепи, если сопротивления внешних цепей удвоятся?

247. Сравнить напряжения V и мощности N во внешней цепи, создаваемые: 1) динамо-машиной постоянного тока с весьма малым внутренним сопротивлением, дающей во внешнюю цепь с сопротивлением 20 Ом ток силой 5,5 А; 2) батареей элементов предыдущей задачи, замкнутой на такое же сопротивление 20 Ом. Как изменятся результаты этого сравнения, если внешнее сопротивление упадет в два раза?

248. Батарея с э. д. с. $\mathcal{E}=40$ В и внутренним сопротивлением $r=5$ Ом замыкается на внешнее сопротивление R,

изменяющееся от нуля до 35 Ом. Построить на одном чертеже следующие графики зависимости от внешнего сопротивления R: 1) мощности, развиваемой во внешней цепи; 2) мощности, рассеивающейся внутри источника; 3) всей мощности.

249. Электрическая лампочка рассчитана на напряжение V и потребляет мощность N. Нить этой лампочки можно рассматривать как цилиндр длины l с радиусом r. Какой длины l' и какого радиуса r' нужно взять нить из того же материала, чтобы лампочка при напряжении V' потребляла мощность N'? В обоих случаях считать температуру нити при калении одинаковой, а охлаждение нити пропорциональным ее поверхности.

250. Вследствие испарения нити при высокой температуре накала диаметр нити с течением времени уменьшается. Насколько надо изменить (повысить или уменьшить?) приложенное к нити накала напряжение при уменьшении диаметра нити на $p\%$, чтобы температура нити осталась прежней? Охлаждение нити происходит пропорционально величине ее поверхности.

251. По сети длиной 5 км необходимо передать энергию от источника с напряжением 110 В, имеющего мощность 5 кВт. Какого минимального диаметра D должен быть медный провод, чтобы потери энергии в сети не превышали 10% от мощности источника? Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-4}$ Ом·см.

252. От источника с напряжением $\mathscr{E} = 100\,000$ В требуется передать на расстояние $l = 5$ км мощность $N = 5000$ кВт. Допустимая потеря напряжения в проводах $n = 1\%$. Рассчитать минимальное сечение S медного провода, пригодного для этой цели. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-4}$ Ом·см. Сравнить с результатом предыдущей задачи.

253. Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче той же самой мощности при условии, что в первом случае падение напряжения в линии $\Delta V = nV$, где V — напряжение на нагрузке?

254. М. О. Доливо-Добровольский предложил трехпроводную систему постоянного тока, изображенную на рис. 67, *а*. Преимущество этой системы заключается в уменьшении массы меди, необходимой для проводов, соединяющих источник с нагрузкой. Для выяснения этого преимущества

сравним две системы *а*) и *б*) на рис. 67, передающие одинаковую мощность [1]).

1) Определить относительное уменьшение массы проводов в системе Доливо-Добровольского при следующих условиях: нагрузки в системе *а*) симметричны, т. е. $R_1 = R_2$;

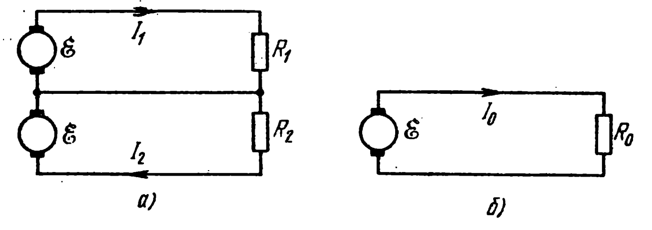


Рис. 67.

передаваемые мощности и потери мощности в сети для обеих систем одинаковы; в каждой системе все провода имеют одинаковое сечение; длины и материал проводов везде одинаковы.

2) Подсчитать соотношение потерь мощности в сети для обеих систем при несимметричных нагрузках в системе *а*), считая, что сопротивление проводов выбрано исходя из условий, сформулированных в п. 1), и мощность генераторов обеих систем одинакова. Определить отношение потерь мощности как функцию величины $\alpha = I_1/I_2$.

255. Имеются три электрические лампочки, рассчитанные на напряжение 110 В и имеющие мощности 50, 50 и 100 Вт. По какой схеме можно включить эти лампочки в сеть с напряжением 220 В так, чтобы все они горели полным накалом?

256. В коридор квартиры подведено напряжение $V = 120$ В. В середине коридора и в противоположном от ввода конце горят 100-ваттные лампочки. От ввода до второй лампочки в конце коридора расстояние $l = 20$ м. Насколько изменится потребляемая лампочками мощность, если на равном расстоянии между ними включить электроплитку, потребляющую ток $I = 5$ А? Сечение провода $S = 2$ мм^2. Изменения сопротивлений лампочек можно не учитывать.

---

[1]) Для осуществления этой системы Доливо-Добровольский специально сконструировал машину постоянного тока с делителем напряжения, так что вместо двух машин, указанных на рис. 67, *а*, применялась одна машина.

257. Дана электрическая цепь, в которой находится, помимо других сопротивлений, некоторое сопротивление R_0, потребляющее мощность N. Когда к клеммам этого сопротивления подключают параллельно еще одно такое же сопротивление, то в них обоих также расходуется мощность N. Дать простейшую схему и расчет такой цепи.

258. Найти закон повышения температуры T манганиновой проволоки, по которой идет постоянный ток. Принять закон охлаждения Ньютона, т. е. считать, что количество тепла, отдаваемое единицей поверхности проволоки за единицу времени, $Q=k(T-T_0)$, где T_0 — температура окружающей среды, k — коэффициент в законе Ньютона. В начальный момент температура проволоки равна температуре окружающей среды T_0. Сопротивление проволоки R, длина l, радиус сечения ее r, плотность τ, удельная теплоемкость c. Сила тока, идущего по проволоке, постоянна и равна I. Сопротивление манганина не зависит от температуры.

259. К электродам электролитической ванны приложена разность потенциалов V, которая поддерживается постоянной. Сопротивление электролита в результате увеличения подвижности ионов и их концентрации меняется с температурой по закону

$$R=\frac{R_0}{1+\alpha T}.$$

Принимая, что охлаждение электролита подчинено закону Ньютона (см. предыдущую задачу), найти установившуюся температуру электролита. Поверхность электролита S и температура окружающей среды T_0. Массу электролита m и его удельную теплоемкость c считать неизменными.

260. Как зависит от времени мощность N, выделяемая током в угольном стержне, включенном на постоянное напряжение V, если сопротивление R угля зависит от температуры по закону

$$R=\frac{R_0}{1+\alpha T}$$

и если проводник охлаждается по закону Ньютона (см. задачу 258)? Масса угля m, удельная теплоемкость c, поверхность S, начальная температура угля и окружающей среды T_0.

261. Имеется n идеально проводящих тел в вакууме с зарядами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и потенциалами $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Какое количество тепла будет выделяться ежесекундно, если пространство между этими телами заполнить однородной

жидкостью с удельной проводимостью λ и диэлектрической проницаемостью ε, а потенциалы тел поддерживать при прежних значениях?

262. К заряженному до напряжения V_0 конденсатору с емкостью C_1 подключается незаряженный конденсатор с емкостью C_2 (рис. 68). Найти зависимость тока в цепи от времени, если сопротивление проводов, соединяющих обкладки конденсаторов, равно R. Какое количество тепла выделится в проводах в результате прохождения тока?

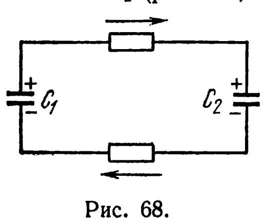


Рис. 68.

263. Пластины воздушного конденсатора с емкостью $C=10^{-10}$ Ф соединены с сопротивлением R через батарею с э. д. с. $\mathscr{E}$. Пластины быстро сближаются в течение времени $\Delta t=10^{-2}$ с, расстояние между ними при этом уменьшается вдвое. При каком условии за это время заряд конденсатора практически не изменится? Найти джоулево тепло $Q_{дж}$, которое выделится в сопротивлении R к моменту окончания перезарядки.

§ 3. Постоянные магниты

264. Три совершенно одинаковые магнитные стрелки расположены в вершинах равностороннего треугольника. Стрелки могут вращаться вокруг осей, перпендикулярных к плоскости треугольника. Всеми остальными влияниями и магнитным полем Земли можно пренебречь. Длина стрелки много меньше длины стороны треугольника. Каково положение равновесия стрелок?

265. Магнитная стрелка обладает магнитным моментом $\mathfrak{M}$ (направление магнитного момента совпадает с направлением оси стрелки от южного полюса к северному). Найти потенциал V и напряженность H магнитного поля в точке A, находящейся на расстоянии d от центра стрелки в направлении φ относительно оси стрелки. Какой угол θ образует напряженность поля в точке A с радиусом-вектором $\boldsymbol{d}$? Магнитная проницаемость среды μ. Расстояние d много больше длины l стрелки.

266. Магнитная стрелка с моментом $\mathfrak{M}$ расположена в однородном магнитном поле, напряженность которого H, и образует с направлением поля угол θ. Чему в этом случае равна потенциальная энергия $\mathscr{E}_{пот}$ стрелки в магнитном поле?

267. Два одинаковых достаточно тонких магнита находятся на расстоянии, которое в n раз больше длины каждого из них. С какой силой F притягивают они друг друга, если магнитный момент каждого из них $\mathfrak{M}$, а длина l и они расположены на одной прямой разноименными полюсами друг к другу? Магнитная проницаемость среды $\mu=1$ и $n \gg 1$.

268. Определить период колебаний T магнитов предыдущей задачи, если их сблизить так, чтобы расстояние между

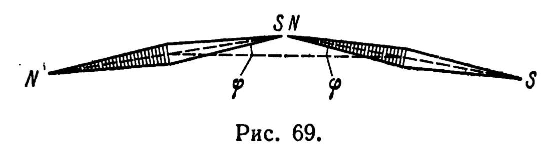


Рис. 69.

ними было в $n=20$ раз меньше длины каждого из них, и отклонить их в одну сторону на небольшой угол φ, как указано на рис. 69, а затем отпустить. Магниты укреплены на осях без трения, и момент инерции каждого магнита вокруг оси равен J.

269. Уменьшится или увеличится период колебаний, если в начальный момент магниты (см. условия предыдущей

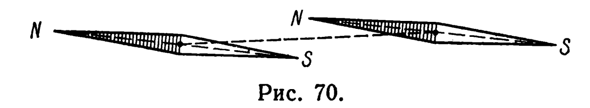


Рис. 70.

задачи) разведены на одинаковые малые углы в разные стороны примерно так, как указано на рис. 70, а затем отпущены?

270. В однородном вертикальном магнитном поле висит подвешенный за один конец тонкий намагниченный стержень. Магнитный момент стержня $\mathfrak{M}=49$ СГСМ, масса его $m=6$ г, длина $l=100$ мм. Найти величину и направление напряженности поля H, если период колебаний T этого магнита в два раза больше периода его колебаний T в отсутствие магнитного поля. Получить общее выражение для T.

271. Магнитный момент стрелки компаса $\mathfrak{M}$, ее масса m, длина l. Горизонтальная слагающая земного магнитного поля H. Рассматривая магнитную стрелку как тонкий стержень, определить период T ее колебаний в магнитном поле Земли.

272. Магнит с магнитным моментом $\mathfrak{M}$ в виде цилиндрического стержня массы m и радиуса R подвешен за свою

середину на нити следующим образом. В середине стержня перпендикулярно к оси просверлено очень малое отверстие, в котором закреплена нить. Как расположится стержень в магнитном поле Земли, горизонтальная и вертикальная составляющие которого соответственно равны $H_г$ и $H_в$?

273. В узком зазоре магнита напряженность поля $H=400$ Э (рис. 71). Какова напряженность поля H_0 в материале магнита вблизи зазора, если магнитная проницаемость материала $\mu=500$?

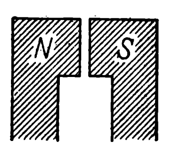
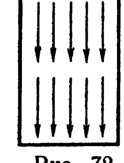


Рис. 71.


Рис. 72.

274. Намагниченность $\mathcal{I}$ прямоугольного бруска одинакова во всех точках бруска и направлена вдоль его оси (рис. 72). Найти поверхностную плотность σ магнитных зарядов на концах бруска и соотношение между B и H внутри бруска.

275. Магнитная стрелка представляет собой прямую тонкую стальную спицу длины $l=6$ см и массы $m=1$ г. Стрелка может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр масс. После отклонения от положения равновесия она совершает колебания в магнитном поле Земли. Показать, что эти колебания гармонические (при малых углах отклонения). Определить магнитный момент $\mathfrak{M}$ стрелки, зная, что период колебаний $T=5$ с и горизонтальная слагающая земного поля $H=0{,}2$ Э.

276. Постоянный магнит в форме подковы с круглым сечением, диаметр которого $D=2$ см, способен удержать якорь с грузом, которые вместе имеют массу $m=10$ кг. Чему равны напряженность H магнитного поля вблизи полюсов магнита и поверхностная плотность σ магнитных зарядов на полюсе?

277. Ряд одинаковых магнитных стрелок насажен на острия, находящиеся на одной прямой, на равных расстояниях друг от друга. Каковы возможные положения равновесия и какие из них устойчивы?

278. Горизонтальную слагающую земного поля H можно определить следующим образом. Взять сильный короткий магнит в виде прямоугольного бруска, насаженного в центре на вертикальное острие, и найти период T малых колебаний его около положения равновесия. Затем расположить его перпендикулярно к земному полю в горизонтальной плоскости и поместить короткую магнитную стрелку на продолжении оси бруска на расстоянии d, много боль-

шем длины бруска, и определить угол α, который образовала стрелка с направлением бруска. Как, зная T, d и α, вычислить H? Момент инерции бруска относительно вертикальной оси, проходящей через его центр, считать известным и равным J.

279. Как из данных предыдущей задачи определить магнитный момент $\mathfrak{M}$ бруска?

280[1]**).** Свободная энергия Ψ, термодинамический потенциал Φ и энтальпия I изотропного магнетика определяются выражениями

$$\Psi = U - TS, \quad \Phi = \Psi - \frac{1}{4\pi} HB, \quad I = U - \frac{1}{4\pi} HB,$$

где U — внутренняя энергия, а S — энтропия магнетика. (Во всем дальнейшем предполагается, что объем магнетика V постоянен и равен единице.) Показать, что для всякого бесконечно малого квазистатического процесса выполняются соотношения

$$d\Psi = -S\,dT + \frac{1}{4\pi} H\,dB,$$

$$d\Phi = -S\,dT - \frac{1}{4\pi} B\,dH,$$

$$dI = T\,dS - \frac{1}{4\pi} B\,dE.$$

281. Найти выражения для плотности свободной и внутренней энергии пара- и диамагнетика.

282. Показать, что для диамагнетиков внутренняя энергия совпадает со свободной.

283. Вычислить плотность внутренней и свободной энергий для парамагнитных газов.

284. Найти разность между теплоемкостями единицы объема пара- и диамагнетика при постоянной индукции C_B и постоянной напряженности магнитного поля C_H. Как осуществить нагревание при постоянном H?

285. Найти изменение температуры парамагнетика при квазистатическом адиабатическом намагничивании (магнитокалорический эффект). Объем парамагнетика во время намагничивания поддерживается постоянным.

---

[1]) Задачи 280—292 предполагают знакомство с явлением электромагнитной индукции, а также вопросами, связанными с энергией магнитного поля и процессами намагничивания.

286. Решить предыдущую задачу в предположении, что магнитная восприимчивость парамагнетика подчиняется закону Кюри $\varkappa \sim 1/T$. Пренебрегая зависимостью C_H от магнитного поля и от температуры, вычислить изменение температуры при адиабатическом размагничивании, когда поле меняется от H до нуля.

287. Найти изменение температуры парамагнитного газа, к которому применима классическая теория теплоемкостей, при адиабатическом размагничивании. Получить численный результат для кислорода при нормальных условиях ($T=293$ К, $P=10^6$ дин/см²). Магнитная восприимчивость кислорода $\varkappa=0{,}16\cdot 10^{-6}$, начальное значение магнитного поля $H=3\cdot 10^4$ Э.

288. Почему магнитокалорический эффект, дающий при нормальных условиях ничтожные понижения температуры, является эффективным методом получения сверхнизких температур?

289. Показать, что вблизи абсолютного нуля температуры для пара- и диамагнетиков выполняются соотношения

$$\lim_{T\to 0}\frac{\partial\mu}{\partial T}=\lim_{T\to 0}\frac{\partial\varkappa}{\partial T}=0.$$

290. Щелочные металлы, как показывает опыт, обладают парамагнетизмом, не зависящим от температуры. Паули объяснил это обстоятельство тем, что парамагнетизм таких металлов обусловлен не магнитными моментами атомов, а спинами электронов проводимости в металлах. Показать, что температурная независимость парамагнетизма «электронного газа» в металлах является следствием термодинамики.

291. Показать, что вблизи абсолютного нуля температуры выполняется соотношение

$$\lim_{T\to 0}(\partial\mathcal{I}/\partial T)_H=0.$$

292. В классической теории парамагнетизма газов Ланжевена намагниченность $\mathcal{I}$ определяется выражением

$$\mathcal{I}=n\mathfrak{M}\left(\operatorname{cth}x-\frac{1}{x}\right),$$

где $\mathfrak{M}$ — магнитный момент атома, n — число атомов в единице объема, а x — безразмерная величина, равная $\mathfrak{M}H/(kT)$. Какой вид принимает это выражение вблизи абсолютного нуля температуры? Выполняется ли при этом

теорема Нернста? Рассмотреть те же вопросы для простейшей квантовой теории парамагнетизма, в которой предполагается, что магнитный момент атома обусловлен спинами электронов и равен одному магнетону Бора. В этой теории

$$\mathcal{Y} = n\mathfrak{M}\,\mathrm{th}\,x.$$

§ 4. Магнитное поле тока. Сверхпроводник в магнитном поле

293. Из куска изолированной проволоки сделан круглый виток радиуса R и подключен к источнику тока с постоянной э. д. с. $\mathscr{E}$. Как изменится напряженность магнитного поля в центре круга, если из того же куска проволоки сделать два прилегающих друг к другу витка радиуса $R/2$?

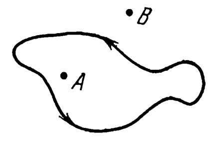


Рис. 73.

294. Дан плоский замкнутый контур произвольной формы, по которому идет ток (рис. 73). Определить направление напряженности магнитного поля в точке A, лежащей внутри контура, и в точке B, лежащей вне контура.

295. Вдоль стенки цилиндрической трубы идет постоянный ток силы I. Какова напряженность магнитного поля H внутри и вне трубы?

296. По однородному прямолинейному цилиндрическому проводнику радиуса R идет ток I. Найти напряженность магнитного поля H внутри и вне проводника на расстоянии r от оси.

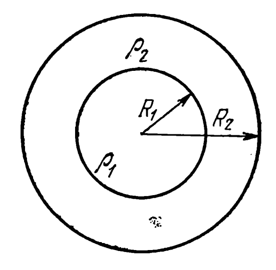


Рис. 74.

297. Бесконечно длинный цилиндрический провод (рис. 74) состоит из двух коаксиальных цилиндров: центрального сплошного цилиндра радиуса R_1, сделанного из материала с удельным сопротивлением ρ_1, и окружающего его полого цилиндра с внешним радиусом R_2, изготовленного из материала с удельным сопротивлением ρ_2. Внешняя поверхность сплошного и внутренняя поверхность полого цилиндров находятся в электрическом контакте. По проводу параллельно его оси течет постоянный ток I. Найти выражения для напряженности магнитного поля H внутри и вне проводов.

298. Вдоль тонкостенной цилиндрической трубки радиуса $R=25$мм течет постоянный ток $I=20$ А. В стенке трубки имеется тонкая щель ширины $d=1$ мм, параллельная оси трубки. Определить напряженность магнитного поля H внутри трубки на расстоянии r от середины щели, большом по сравнению с d.

299. По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j=1000$ А/см². Проводники ограничены цилиндрическими поверхностями. (На рис. 75 поперечные сечения проводников заштрихованы.) Найти величину и направление напряженности магнитного поля в полости $П$. Ток в левом проводнике направлен к читателю, а в правом — от читателя. Расстояние между осями цилиндров $AB=d=5$ см.

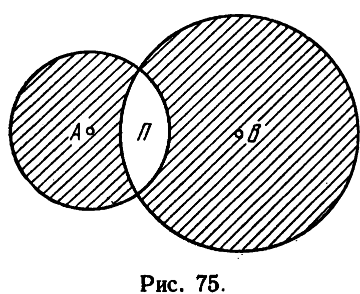


Рис. 75.

300. Определить напряженность магнитного поля внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотности j, равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно d.

301. В высокий цилиндрический сосуд радиуса R налит электролит. Внутри сосуда параллельно его оси расположен цилиндрический металлический стержень, поверхность которого покрыта изолирующей краской. Расстояние между осями стержня и сосуда равно d. В электролите параллельно оси течет ток силы I, возвращающийся обратно по стержню. Считая плотность тока в электролите постоянной, найти силу, с которой магнитное поле, созданное рассматриваемыми токами, действует на единицу длины стержня. Куда эта сила направлена? Радиус стержня равен r.

302. На рис. 76 показана схема симметричного разветвления токов. Все проводники прямолинейны, бесконечны и лежат в одной плоскости. Определить напряженность магнитного поля на линии, перпендикулярной к плоскости токов и проходящей через точку A, если сила тока в каждой ветви равна I.

303. Решить задачу 302 с таким изменением условия, какое можно видеть на рис. 77.

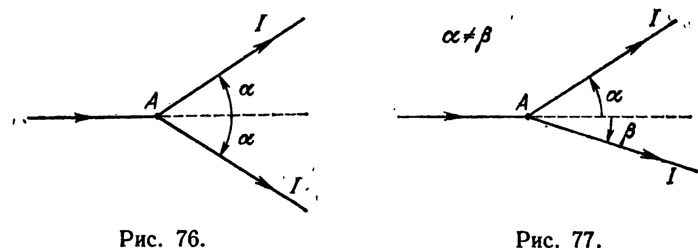


Рис. 76.

Рис. 77.

304. Определить напряженность магнитного поля в плоскости симметрии проводника, изогнутого под прямым углом (рис. 78), на линии OAO', лежащей в плоскости тока, и на линии, перпендикулярной к этой плоскости и проходящей через точку A. Начертить приближенно ход линий магнитного поля в плоскости симметрии.

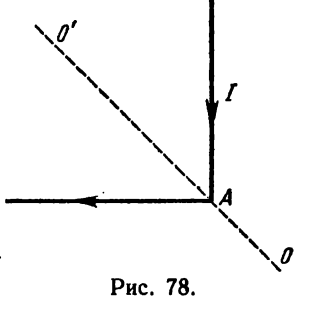


Рис. 78.

305. Источник э. д. с. присоединен к двум противоположным вершинам проволочного плоского контура, имеющего форму квадрата. Какова величина напряженности магнитного поля H, создаваемого токами, текущими по сторонам контура, в центре квадрата? Поле подводящих проводов не учитывать.

306. Найти напряженность магнитного поля H в центре плоского прямоугольного контура со сторонами a и b, обтекаемого током I.

307. Определить напряженность магнитного поля H в центре равностороннего треугольника со стороной a, обтекаемого током I.

308. Какова напряженность магнитного поля H в центре равностороннего треугольника из однородной проволоки, если источник э. д. с. подключен к двум вершинам треугольника? Поле подводящих проводов не учитывать.

309. К противоположным концам диаметра AB проволочного контура в виде окружности радиуса R (рис. 79) присоединен источник э. д. с. Какова напряженность магнитного поля H в произвольной точке C диаметра? Поле подводящих проводов не учитывать.

310. Деревянный шар радиуса R обмотан тонкой проволокой так, что витки ложатся по большим кругам, пересекаясь в концах одного и того же диаметра AB (рис. 80). Число витков шесть, и плоскости каждой пары соседних витков образуют угол 30°. По проволоке течет ток силы I.

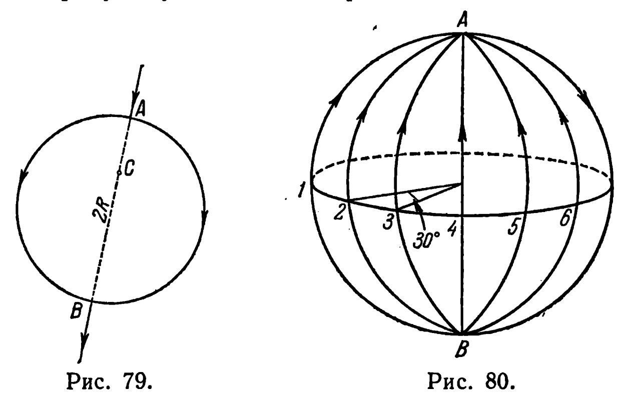


Рис. 79.

Рис. 80.

Найти величину и направление напряженности поля H в центре шара.

311. На деревянный цилиндрический барабан намотаны четыре витка проволоки под углом 45° один к другому; каждый виток представляет собой прямоугольную рамку со сторонами h (высота барабана) и $D=AB$ (диаметр основания). Обмотка начинается и кончается в центре C одного из оснований барабана (рис. 81). По проволоке течет ток силы I. Найти величину и направление напряженности магнитного поля H в середине оси цилиндра.

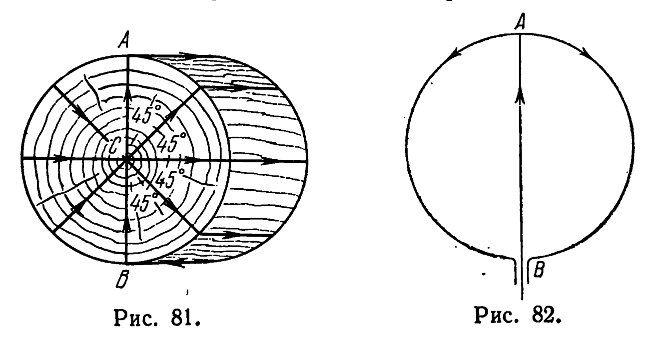


Рис. 81.

Рис. 82.

312. Внутри однородной проводящей сферы от точки A к точке B (рис. 82) по диаметру большого круга проходит

проводник. Ток силы I идет от B к A, а затем по сфере — к точке B. Определить напряженность магнитного поля внутри и вне сферы, создаваемого токами, текущими по проводнику и по сфере.

313. Деревянный шар радиуса R обмотан тонкой проволокой так, что все витки параллельны между собой. Витки плотно уложены и покрывают половину поверхности шара в один слой (рис. 83). По проволоке идет ток силы I. Найти напряженность магнитного поля H в центре шара C. Общее число витков N. Витки можно считать кольцами, находящимися на равном расстоянии друг от друга по дуге большого круга, плоскость которого перпендикулярна к плоскости колец.

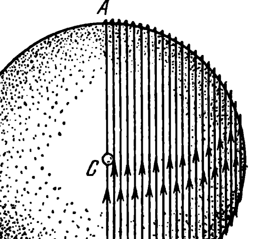


Рис. 83.

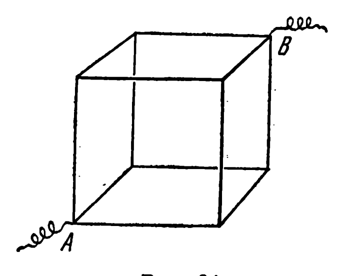


Рис. 84.

314. Из одинаковых кусков проволоки спаян куб (рис. 84). К противоположным концам A и B его диагонали приложена э. д. с. Какова напряженность H магнитного поля в центре куба? Поле подводящих проводов не учитывать.

315. Найти напряженность магнитного поля H в центре плоского замкнутого контура, изображенного на рис. 85, по которому течет ток силы I. Контур состоит из двух дуг радиуса R и двух прямых, отстоящих друг от друга на расстоянии $2a$.

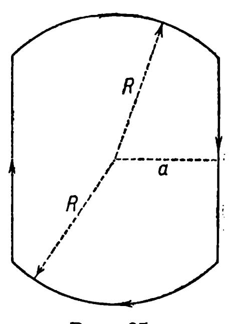


Рис. 85.

316. Найти напряженность магнитного поля H в центре плоской спирали, по которой течет ток силы I. Спираль заключена между окружностями радиуса R_1 и R_2 (рис. 86). Общее число витков спирали N. Поле подводящих проводов не учитывать.

317. Найти напряженность магнитного поля H на оси соленоида в точке A, из которой диаметры концов видны под углами 2α и 2β (рис. 87). Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l, и по нему идет ток силы I.

318. Для предыдущей задачи построить график зависимости напряженности магнитного поля H на оси соленоида от расстояния x точки A от середины соленоида, приняв следующие числовые данные: $I=1$ А; $D=2$ см; $l=1$ м; $N=1000$; $x=0$; 25; 40; 45; 50; 60 см.

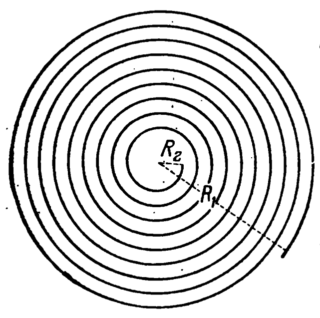


Рис. 86.

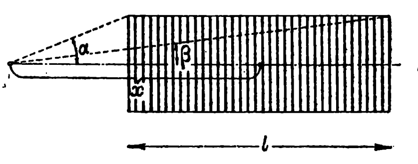


Рис. 87.

319. Найти напряженность магнитного поля H в фокусе плоского эллиптического проводника, по которому течет постоянный ток силы I. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=c/a$ и параметр $p=b^2/a$, где a и b — полуоси эллипса, c — расстояние между его фокусами.

320. Два круговых тока одинакового радиуса R отстоят друг от друга на расстоянии их диаметра. Токи одинаково направлены и одинаковой силы. Построить график зависимости напряженности поля H вдоль прямой, проходящей через их центры (рис. 88).

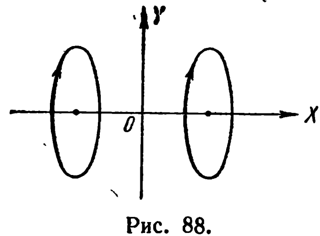


Рис. 88.

321. Заряженный шарик радиуса R равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Общий заряд шарика равен q. Найти магнитное поле шарика на расстояниях r, больших по сравнению с R, если заряд равномерно распределен: 1) по поверхности шарика; 2) по объему шарика.

322. Определить удлинение спиральной пружины x, по которой течет постоянный ток I и к нижнему концу которой подвешен груз массы m (рис. 89). Длина недеформированной пружины равна l, диаметр витка D, число витков N.

Предполагается, что деформации малы ($x \ll l$) и подчиняются закону Гука (коэффициент упругости пружины равен k).

323. Длинный сплошной металлический цилиндр радиуса R заряжен электричеством и вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей продольной оси. Заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра, равен Q. Найти напряженность магнитного поля H внутри цилиндра, а также разность потенциалов V между осью и поверхностью цилиндра, возникающие из-за его вращения. Действием центробежной силы пренебречь. (Когда это можно делать?)

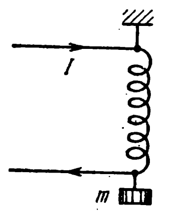


Рис. 89.

324. Длинный сплошной цилиндр из диэлектрика статически поляризован, причем поляризованность во всех точках цилиндра направлена радиально, а величина ее пропорциональна расстоянию от продольной оси цилиндра, т. е. $\mathscr{P} = k\mathbf{r}$ ($k = \text{const}$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный от оси перпендикулярно к ней). Цилиндр вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Найти напряженность магнитного поля внутри цилиндра вдали от его концов, если радиус цилиндра равен R.

325. Тонкий сердечник тороидальной катушки длины l сделан из ферромагнитного материала. Минимальная напряженность магнитного поля, при которой намагниченность материала достигает насыщения ($\mathscr{Y} = \mathscr{Y}_{нас}$), равна $H = H_{нас}$. Определить минимальный ток I_0, который должен течь по обмотке, чтобы намагниченность сердечника достигла насыщения. Какой толщины d должен быть сделан воздушный зазор в сердечнике, чтобы не возникало насыщения намагниченности, если по обмотке течет ток $I > I_0$? Число витков обмотки равно N.

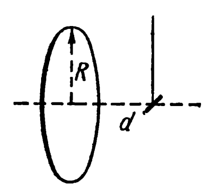


Рис. 90.

326. Достаточно тонкий диамагнитный стерженек массы $m = 0,1$ г, обладающий магнитной восприимчивостью $\varkappa = -14,5 \cdot 10^{-6}$, свободно подвешен за центр масс на оси кругового тока на расстоянии d (значительно превышающем длину стерженька) от плоскости витка (рис. 90). Радиус витка $R = d = 10$ см; сила тока $I = 100$ А. Как ориентируется стерженек и какая результирующая сила F на него действует? Плотность вещества стерженька $\tau = 9,8$ г/см^3.

327. Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ механическим переключателем присоединяется $N = 100$ раз в секунду к полюсам динамо-машины, дающей $V = 120$ В, и столько же

раз в секунду разряжается через тангенс-буссоль, состоящую из $n=100$ витков радиуса $R=15,7$ см. Горизонтальная слагающая земного поля $H=0,2$ Э. Найти угол отклонения магнитной стрелки.

328. Как влияет на отклонение стрелки тангенс-буссоли в предыдущей задаче сопротивление в цепи конденсатор — тангенс-буссоль?

329. Ток от батареи аккумуляторов с незначительным внутренним сопротивлением проходит последовательно через реостат с сопротивлением $R=10$ Ом и через тангенс-буссоль. Наблюдается отклонение стрелки $\alpha_1=60°$. В цепь вводят дополнительное сопротивление $r=10$ Ом, и отклонение стрелки уменьшается до $\alpha_2=45°$. Определить сопротивление R' тангенс-буссоли.

330. Тангенс-буссоль сначала не была точно установлена в плоскости магнитного меридиана, поэтому при пропускании тока в одном направлении стрелка отклонилась на угол θ, а при пропускании тока в другом направлении стрелка отклонилась в противоположном направлении на угол $\theta' \neq \theta$. Определить силу тока I, если постоянная прибора k (k равна току, при котором стрелка отклоняется на 45°).

331. Плоская прямоугольная проволочная рамка может поворачиваться вокруг вертикальной оси, проходящей через центр рамки. Угол поворота можно определять по лимбу с помощью указателя, жестко связанного с рамкой (рис. 91). В центре рамки на вертикальном острие помещена магнитная стрелка; первоначально рамка и стрелка находятся в одной плоскости. При пропускании тока 1 А стрелка отклонилась, и для того, чтобы она снова оказалась в плоскости рамки, последнюю пришлось повернуть на угол $\vartheta=30°$. Какой силы ток можно измерить таким образом этим прибором?

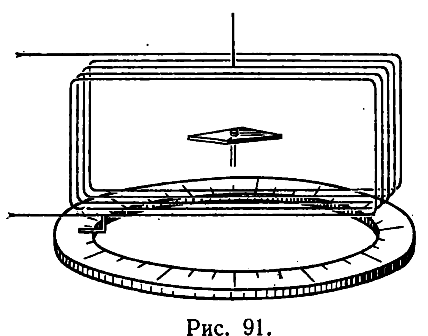


Рис. 91.

332. Два взаимно перпендикулярных витка в виде окружностей радиусов R и R' имеют общий центр и расположены в вертикальных плоскостях, причем плоскость первого из витков совпадает с плоскостью магнитного меридиана. В общем центре этих витков на острие находится корот-

кая магнитная стрелка, которая может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости. Сила тока в витке, расположенном в плоскости магнитного меридиана, равна I, в другом витке I'. При этом наблюдается отклонение магнитной стрелки на угол θ. Если переменить направление тока I', то угол отклонения стрелки будет θ'. 1) Чему равна сила тока I'? 2) Чему равна горизонтальная слагающая земного магнитного поля H?

333. Два взаимно перпендикулярных круговых тока и магнитная стрелка расположены так же, как и в предыдущей задаче. Силы токов равны. Наблюдается отклонение стрелки на угол θ. Найти силу тока I, зная горизонтальную слагающую земного магнитного поля H.

334. Прямоугольная проволочная рамка (площадь прямоугольника S), состоящая из n витков, подвешена на бифиляре и ориентирована в плоскости магнитного меридиана. По рамке пропускают постоянный ток, и она поворачивается на угол θ. Определить силу тока, если момент сил, закручивающих бифиляр на угол в 1 радиан, равен M.

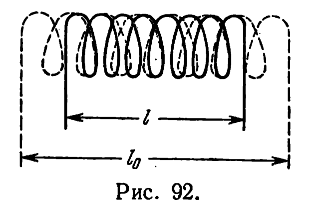


Рис. 92.

335. Достаточно длинный соленоид может сжиматься и растягиваться, как пружина, имеющая жесткость k (рис. 92). По соленоиду проходит ток I, и длина его при этом равна l. Определить первоначальную длину соленоида l_0.

336. Д. А. Гольдгаммер установил, что удельное сопротивление висмута под действием магнитного поля изменяется по закону

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = 3\cdot 10^{-9} H^2,$$

где H — напряженность поля в эрстедах. Этим свойством висмута пользуются для измерения напряженности магнитного поля. Отвлекаясь от ошибок, с которыми был установлен численный коэффициент $3\cdot 10^{-9}$, найти точность, с которой может быть измерено магнитное поле напряженности 4000 Э, если сопротивление висмутовой спирали порядка 10 Ом и измерение ее сопротивления производится на равноплечем мосте, в одну из диагоналей которого включена э. д. с. 1 В, а в другую — гальванометр с чувствительностью $1\cdot 10^{-6}$ А на деление и сопротивлением 200 Ом. Считать, что равновесие моста может быть установлено с точностью до 1 деления прибора.

337. Проволочный контур $ABCD$ в форме квадрата (рис. 93) находится в магнитном поле длинного тонкого стержня с магнитным моментом единицы объема $\mathfrak{M}_0$ и сечением S, причем северный полюс N магнита находится в центре квадрата, а сам магнит перпендикулярен к плоскости проволочного контура. К противоположным концам диагонали AC подключают источник э. д. с., вследствие чего по сторонам контура идет ток силы I. Найти момент пары сил M, вращающих контур, и его направление.

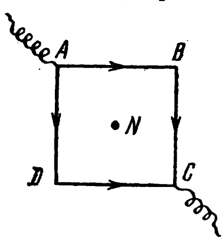


Рис. 93.

338. В магнитном поле магнита предыдущей задачи помещен круговой проводник радиуса R, обтекаемый током I по часовой стрелке, если смотреть со стороны северного полюса магнита. Магнит расположен по оси кругового тока, и его северный полюс отстоит на расстоянии d от центра проводника. Определить силы, действующие на проводник со стороны магнита.

339. В постоянном однородном магнитном поле напряженности H находится вращающаяся вокруг оси рамка площадью S. Ось расположена перпендикулярно к направлению поля (рис. 94). На рамку намотано n витков проволоки, по которой через коллектор идет ток I. Коллектор переключает направление тока в тот момент, когда плоскость рамки перпендикулярна к направлению магнитного поля. Определить максимальную работу A, которую может совершить рамка за один оборот, если известно, что ток I между переключениями можно считать постоянным.

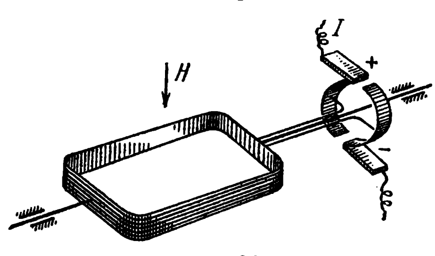


Рис. 94.

340. Магнит в виде круглого длинного стального цилиндра установлен вертикально. Для расчета принимаем, что на его полюсе N сосредоточена магнитная масса m. На полюс опирается проволочная скоба $ABOCD$ со стержнем ON (рис. 95), имеющая форму буквы «Т»; концы скобы A и D погружены в ртуть, налитую в горизонтальное кольцевое корыто. Точка O является серединой $BC=2l$. Части

$AB=CD$ малы по сравнению с l. К магниту и ртути в корыте подводится постоянное напряжение, вследствие чего по стержню ON идет ток $2I$ и проволочный контур вращается вокруг ON. Расстояние ON проволоки BC от полюса N равно l. Определить: 1) момент пары сил M, вращающих контур; 2) точку приложения силы, действующей на плечо OC.

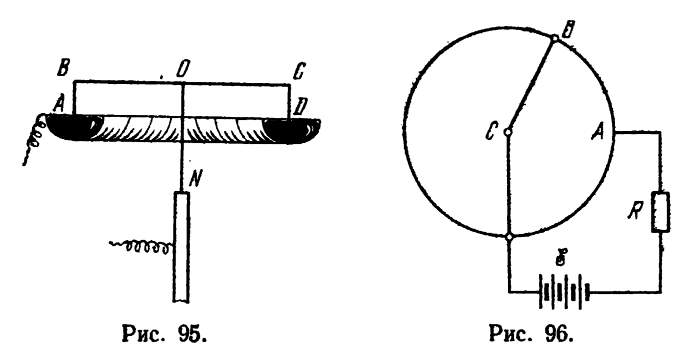


Рис. 95. Рис. 96.

341. Принцип действия электродвигателя можно понять с помощью модели, показанной на рис. 96. Неподвижный круговой проводник расположен горизонтально в вертикальном однородном магнитном поле напряженности H. В центре круга C к вертикальной оси прикреплен металлический стержень CB массы m и длины l, касающийся другим концом кругового проводника. К стержню у центра C и к точке A кругового проводника через сопротивление R подведен ток от батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$. Найти закон возрастания угловой скорости ω вращения стержня после включения э. д. с., если при вращении на стержень действуют силы трения, момент которых равен $\alpha l^2\omega$, где α — постоянный коэффициент пропорциональности. Электрическим сопротивлением стержня, кругового проводника, контактов и внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь по сравнению с сопротивлением R.

342. Зеркальный гальванометр имеет проволочную прямоугольную рамку 40×30 мм^2 из 100 витков тонкой проволоки, подвешенную на нити, коэффициент кручения которой 0,001 гс·см/(угл. град). Рамка находится в зазоре между полюсами магнита, создающего поле напряженности $H=1000$ Э, которое можно считать направленным радиально к оси вращения при всех возможных положениях рамки. 1) На какой угол α отклонится рамка, если по ее

обмотке пустить ток 0,1 мА? 2) Если миллиметровую шкалу поместить от зеркала гальванометра на расстоянии 1 м, то какому току I будет соответствовать отклонение зайчика на 1 мм?

343. Прямоугольная рамка может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через середины противоположных сторон рамки. Рамку помещают в однородное горизонтальное магнитное поле напряженности H и пропускают по ней ток. Определить положения равновесия рамки и исследовать их устойчивость.

344. Рамка из n витков тонкой проволоки имеет форму квадрата со стороной a. Она может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через середины противоположных сторон рамки. По рамке идет постоянный ток I. Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле напряженности H. 1) Указать направление тока в рамке при ее устойчивом равновесии. 2) Определить период T малых колебаний рамки около этого положения, если момент инерции рамки J.

345. На железный сердечник, имеющий форму тора квадратного сечения (сторона $a=4$ см) с диаметром $D=40$ см, намотана равномерно в один слой проволока. Число витков $N=500$. По проволоке пускают ток $I=1$ А. Магнитная проницаемость железа $\mu=400$. Найти поток индукции через сечение сердечника.

346. Если железный тор предыдущей задачи разрезать в одном месте так, чтобы образовался воздушный зазор толщиной $d=1$ мм, то чему будет равен поток индукции Φ, если пренебречь рассеянием силовых линий?

347. Железный сердечник имеет размеры, указанные в предыдущих двух задачах. Если воздушный зазор равен $d_1=1$ мм, то при некоторой силе тока поток индукции сердечника $\Phi_1=3000$ Мкс. Когда воздушный зазор увеличился до $d_2=2$ мм, то при той же силе тока значение потока индукции оказалось $\Phi_2=2500$ Мкс. Предполагая, что в обоих случаях можно пренебречь рассеянием линий индукции, определить магнитную проницаемость μ железа.

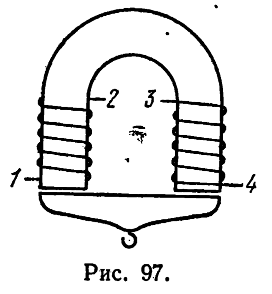


Рис. 97.

348. Аккумулятор питает катушки электромагнита, показанного на рис. 97. При каком соединении катушек (параллельном или последовательном) подъемная сила электромагнита будет

больше и во сколько раз? Указать, какие концы надо соединять при том и другом включении катушек. Обе катушки совершенно одинаковы.

349. Электромагнит из железного бруса в форме подковы имеет размеры, указанные на рис. 98 в сантиметрах. Число витков обмотки $N=200$. Сила тока $I=2$ А. Как велика подъемная сила F электромагнита, если $\mu=200$?

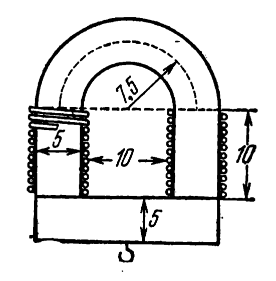


Рис. 98.

350. Якорь электромагнита предыдущей задачи несет нагрузку в 20 кгс и отстоит от сердечника на расстоянии 1 мм. Какой ток I нужно пустить в обмотку электромагнита, чтобы он притянул якорь?

351. Внутри длинной катушки (рис. 99), на каждый сантиметр длины которой приходится n витков, находится короткая катушка сечения S, состоящая из N витков; ось этой катушки перпендикулярна к оси длинной катушки и направлена вертикально. Внутренняя катушка укреплена на одном конце коромысла весов, которое в отсутствие тока

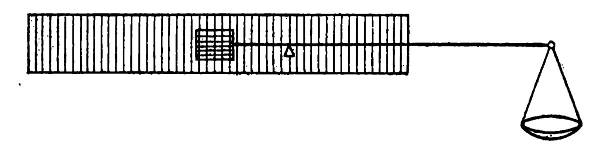


Рис. 99.

находится в равновесии. Когда через обе катушки пропускают один и тот же ток I, то для уравновешивания весов на длинное плечо коромысла нужно поместить груз массы m. Длина плеча коромысла, несущего груз, равна l. Определить силу тока I.

352. Как скажется значительное укорочение длинной катушки, описанной в предыдущей задаче, на показаниях прибора, если число n остается неизменным?

353. При каком условии можно с помощью прибора, описанного в задаче 351, измерять силу переменного тока? Какую силу тока будет показывать прибор?

354. Может ли прибор, описанный в задаче 351, служить ваттметром?

355. По длинному соленоиду, имеющему n витков на 1 см, идет ток I. Найти давление P, действующее на боковую поверхность соленоида.

356. Почему два параллельных проводника, по которым идут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных пучка отталкиваются?

357. От полюсов источника э. д. с. $\mathscr{E}$ ток идет по двум параллельным длинным проводам, включенным на нагрузку

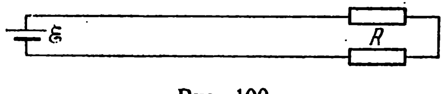


Рис. 100.

R (рис. 100). Построить силовые линии электрического и магнитного полей в плоскости, перпендикулярной к плоскости параллельных токов.

358. От одного полюса источника э. д. с. $\mathscr{E}$ идут два параллельных прямых провода, которые затем через сопротивление R и обратный провод, достаточно удаленный от первых двух, присоединяются ко второму полюсу источника (рис. 101). Каковы электрическое и магнитное поля в плоскости, перпендикулярной к плоскости параллельных токов?

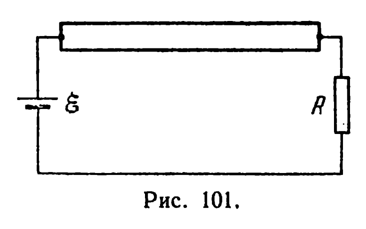


Рис. 101.

359. По достаточно длинной шине, укрепленной горизонтально, идет ток $I = 1$ А. На каком расстоянии d от шины параллельно ей в той же вертикальной плоскости должен быть расположен голый, достаточно длинный медный провод, чтобы силы магнитного взаимодействия уравновесили вес провода, если по нему в ту же сторону идет ток i? Масса провода m, длина его l.

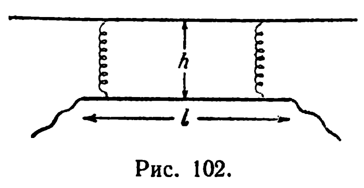


Рис. 102.

360. Под длинной горизонтальной шиной на двух одинаковых пружинах (коэффициент жесткости каждой пружины равен k дин/см) подвешен прямой провод длины l (рис. 102). Когда по шине и проводнику токи не идут, расстояние между ними равно h. Найти расстояние x между ними, если по шине течет ток I, а по проводу —

ток i. Рассмотреть два случая: 1) токи совпадают по направлению и 2) токи противоположны по направлению. Провод может двигаться только в вертикальной плоскости.

361. Между полюсами сильного магнита находится плоская кювета, от узких стенок которой отходят две параллельные вертикальные трубки. Сверху и снизу в кювету входят платиновые электроды A (+) и K (—), присоединенные через ключ к источнику э. д. с. $\mathscr{E}$. Кювета и трубки

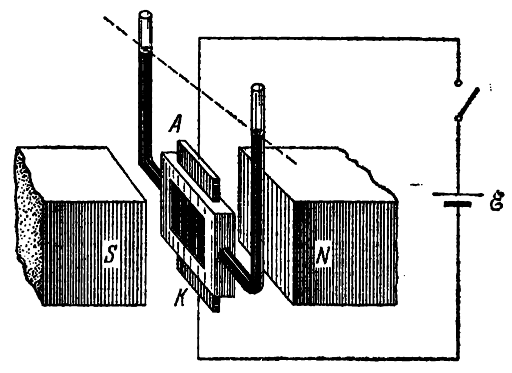


Рис. 103.

залиты проводящей жидкостью так, что уровни жидкости в вертикальных трубках стоят на одной высоте (рис. 103). Что произойдет после того, как ключ будет замкнут?

362. Прибор, описанный в предыдущей задаче, можно использовать для измерения силы тока. Определить силу тока I, идущего через жидкость кюветы, если индукция магнитного поля равна B, толщина кюветы d, установившаяся разность уровней жидкости в вертикальных трубках h, плотность жидкости τ. От чего зависит чувствительность прибора?

363. Оценить порядок величины «выталкивающей» силы, действующей на непроводящее тело объема V, помещенное в проводящую немагнитную жидкость, в которой течет ток плотности $\boldsymbol{j}$ поперек магнитного поля с индукцией $\boldsymbol{B}$. Какие эффекты могут привести к отличию реальной выталкивающей силы от силы, полученной согласно такой оценке?

364. Между полюсами сильного электромагнита помещают U-образную трубку так, что одно колено (капиллярное) находится в магнитном поле, а другое (широкое) — вне поля. В трубку наливают жидкость, магнитная вос-

приимчивость которой $\varkappa$, а плотность τ. Насколько изменится уровень жидкости в капилляре при включении поля напряженности H? Магнитную восприимчивость пара и воздуха над жидкостью принять за 1.

365. В прямоугольную кювету (рис. 104), передняя и задняя стенки которой металлические, а прочие стенки диэлектрические, налит электролит с удельной проводимостью $\lambda=0{,}2$ См/см. К металлическим стенкам приложено напряжение $V=30$ В, и вся кювета помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B=100$ Гс, направленной вертикально. Размеры кюветы: $l=20$ см, $a=2$ см, плотность электролита $\tau=1$ г/см^3. Определить разность уровней жидкости Δh около правой и левой стенок кюветы.

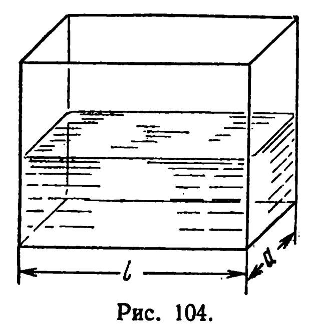


Рис. 104.

366. Для осуществления теплосъема с ядерных реакторов в качестве теплоносителя применяют расплавленные металлы. Перекачка металлов по трубам производится с помощью электромагнитных насосов: участок трубы с расплавленным металлом помещается в поперечное магнитное поле, т. е. поле, перпендикулярное к оси трубы; через тот же участок трубы перпендикулярно к ее оси и к магнитному полю пропускается поперечный электрический ток. При этом возникает сила, приводящая жидкость в движение. Оценить ток, необходимый для перекачки ртути по трубе с диаметром $D=20$ мм и длиной $l=10$ м со скоростью $v=1$ л/с. Вязкость ртути $\eta=1{,}5\cdot10^{-2}$ дин$\cdot$с/см^2, индукция магнитного поля $B=1000$ Гс.

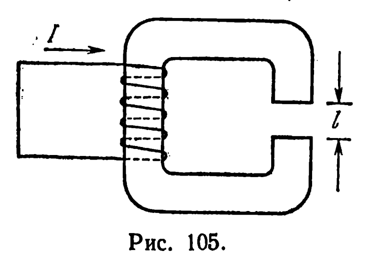


Рис. 105.

367. В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден постоянный ток I (рис. 105). В магнитопроводе из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ имеется небольшой зазор толщины l, так что рассеянием магнитного поля в зазоре можно пренебречь. Длина магнитопровода (вместе с зазором) равна L. Чему будет равен ток I_0 в обмотке электромагнита, если в зазор вставить пластину толщины l из того же железа?

368. Длинный сверхпроводящий цилиндр (из сверхпроводника I рода) внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B, направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f, действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.

369. Кольцо из тонкой проволоки помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B=10$ Гс, перпендикулярное к плоскости кольца, и охлаждением переведено в сверхпроводящее состояние. Найти силу тока в кольце после выключения магнитного поля, если радиус кольца $R=5$ см, а радиус проволоки $r=1$ мм.

Указание. Индуктивность тонкого проволочного кольца (если ток течет по его поверхности) в гауссовой системе дается выражением $L=4\pi R\,[\ln(8R/r)-2)$.

370. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода параллельно этой поверхности подвешен тонкий прямолинейный провод на расстоянии h от плоскости, по которому течет постоянный ток I. Найти линейную плотность сверхпроводящего тока i, текущего по поверхности сверхпроводника.

Указание. Применить метод зеркальных изображений.

371. Над плоской поверхностью сверхпроводника I рода на изолирующем слое толщины $h=5$ мм лежит тонкое сверхпроводящее кольцо радиуса $R=10$ см, по которому течет постоянный ток I. При каком токе I кольцо начнет парить над сверхпроводником, если масса кольца $m=1$ г?

372. На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\mathfrak{M}=10^3$ Гс·см^3 и массой $m=10$ г будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем.

Указание. Применить метод зеркальных изображений. Воспользоваться выражением для взаимной потенциальной энергии двух точечных диполей.

373. Шар радиуса R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}_0$. Определить магнитное поле $\boldsymbol{B}$ вне шара, если поле $\boldsymbol{B}_0$ еще не разрушает сверхпроводимость в шаре. Найти также поверхностную плотность сверхпроводящего тока i.

374. Бесконечно длинный цилиндр радиуса R из сверхпроводника I рода внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией $\boldsymbol{B}$, перпендикулярное к оси цилиндра. Определить магнитное поле $\boldsymbol{B}$ вне цилиндра, если поле $\boldsymbol{B}_0$

еще не разрушает сверхпроводимость в цилиндре. Найти также поверхностную плотность тока сверхпроводимости i.

375. Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида $B=1000$ Гс. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материала шарика $\tau=8$ г/см³.

376. Для получения сверхсильных магнитных полей в катушках применяются обмотки из сверхпроводников II рода. Концы обмоток (пока проволока находится в нормальном состоянии) присоединяются к источнику тока. Затем катушки охлаждаются до гелиевых температур и переходят в сверхпроводящее (или смешанное) состояние. После этого катушки отключаются от источника тока и замыкаются накоротко.

Сверхпроводящий короткозамкнутый многослойный соленоид с внутренним радиусом $R_1=2$ см, наружным $R_2=4$ см и длиной $l=20$ см создает внутри поле с индукцией $B_0=100$ кГс. Оценить количество жидкого гелия, которое испарится при переходе соленоида из сверхпроводящего (или смешанного) в нормальное состояние. Удельная теплота испарения гелия $q=0{,}7$ кал/см³.

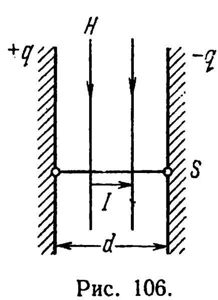


Рис. 106.

377. В конденсаторе, состоящем из двух пластин, действует однородное магнитное поле напряженности H, параллельное его пластинам (рис. 106). Пластины конденсатора заряжают зарядами $+q$ и $-q$, а затем их соединяют проводником, обладающим значительным сопротивлением. На проводник действует сила Лоренца, сообщая ему некоторый импульс. Объяснить происхождение этого импульса и вычислить соответствующую плотность импульса поля. Поле тяготения не учитывать.

§ 5. Электромагнитная индукция

378. Два параллельных, замкнутых на одном конце провода расположены в однородном магнитном поле с индукцией B так, что плоскость проводов перпендикулярна к полю (рис. 107, *а*). На провода положен металлический мостик, который может (без трения) скользить по проводам.

Если привести мостик в движение с постоянной скоростью v, то в контуре, который он образует вместе с проводами, возникает э. д. с. индукции $\mathcal{E}$ и электрический ток I. Поэтому для поддержания скорости v приходится приложить к мостику некоторую силу F. Исходя из принципа Ленца и пользуясь законом взаимодействия между токами и магнитным полем, вывести закон индукции.

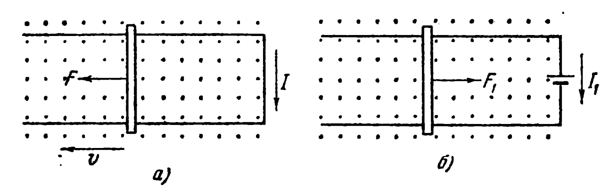


Рис. 107.

Указание. Принцип, установленный Ленцем, позволяет утверждать следующее. Если мы закрепим мостик неподвижно и включим в контур батарею (рис. 107, *б*), которая создает ток I_1, равный току I, возникающему в случае движения мостика, то сила F_1, действующая на мостик, будет равна по величине и противоположна по направлению той силе, которую надо приложить в первом случае, чтобы поддерживать движение мостика.

379. Представим себе, что рельсы железнодорожной колеи шириной 1,2 м, идущие по магнитному меридиану, изолированы друг от друга и от Земли. По этим рельсам идет поезд со скоростью 60 км/ч. Вертикальная слагающая магнитного поля Земли $H_в = 0{,}5$ Э. Что покажет вольтметр, включенный в каком-нибудь месте между рельсами: 1) когда поезд приближается к прибору; 2) когда поезд проходит над прибором, т. е. прибор находится между двумя скатами какого-нибудь вагона, и 3) когда поезд удаляется от прибора?

380. Будет ли в условиях предыдущей задачи влиять на показания милливольтметра горизонтальная слагающая магнитного поля Земли, если путь непрямолинеен?

381. Маленький прямолинейный магнит расположен в центре круглого кольца радиуса a, состоящего из N витков проволоки, концы которой соединены с баллистическим гальванометром. Ось магнита перпендикулярна к плоскости кольца. При удалении магнита из кольца баллистический гальванометр дает отброс. Как по величине этого отброса определить магнитный момент $\mathfrak{M}$ магнита?

382. Прямоугольная рамка со сторонами a и b движется равномерно со скоростью v в направлении, перпендикулярном к бесконечно длинному прямому проводнику, лежащему в плоскости рамки параллельно стороне b. По проводнику идет ток I. Найти э. д. с. $\mathcal{E}$, индуцируемую в рамке, и указать направление индуцированного тока.

383. Прямоугольная рамка предыдущей задачи вращается с постоянной угловой скоростью вокруг стороны b, отстоящей на расстоянии $c>a$ от проводника, по которому идет ток. Будет ли э. д. с., индуцируемая в рамке, синусоидальна?

384. Прямоугольная рамка $(a \times b)$ равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг стороны a в однородном переменном магнитном поле, изменяющемся синусоидально с угловой скоростью ω' и перпендикулярном к оси вращения рамки. Определить величину индуцированной э. д. с. $\mathcal{E}$. Рассмотреть при $\omega=\omega'$ частные случаи: 1) в начальный момент $H=H_0$, а плоскость рамки перпендикулярна $\boldsymbol{H}$; 2) в начальный момент $H=H_0$, а плоскость рамки параллельна $\boldsymbol{H}$.

385. Прямоугольная рамка $(a \times b)$ вращается вокруг одной из своих сторон в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{H}$, перпендикулярном к оси вращения, с переменной угловой скоростью $\omega=\omega_0(1-e^{-kt})$. Определить величину индуцированной э. д. с. $\mathcal{E}$, если в начальный момент рамка перпендикулярна к полю.

386. Длинная незаряженная пластина из немагнитного материала движется равномерно в однородном магнитном поле с индукцией $B=1800$ Гс со скоростью $v=6{,}28 \cdot 10^7$ см/с. Векторы $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ взаимно перпендикулярны и параллельны плоскостям пластины. Определить поверхностную плотность электрических зарядов на пластине, возникающих вследствие ее движения.

387. Длинный незаряженный цилиндр из немагнитного материала радиуса $r=12{,}56$ см равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B=300$ Гс, параллельном оси цилиндра, с угловой скоростью $\omega=60$ рад/с. Определить поверхностную плотность зарядов σ, возникающих вследствие вращения на боковой поверхности цилиндра. Указать знак поверхностных зарядов, если векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{B}$ направлены в одну сторону. Магнитным полем возникающих зарядов и инерционными эффектами электронов пренебречь.

388. Металлический шар радиуса a из немагнитного материала движется равномерно в постоянном и однородном

магнитном поле с индукцией $\boldsymbol{B}$ со скоростью $\boldsymbol{v}$, направленной под углом к магнитному полю. Найти напряженность электрического поля внутри и вне шара в «неподвижной» системе отсчета, относительно которой шар движется со скоростью $\boldsymbol{v}$. Найти также объемную и поверхностную плотность индуцированных зарядов. Магнитным полем движущихся индуцированных зарядов пренебречь.

389. На клеммах генератора поддерживается постоянное напряжение $V=120$ В. К клеммам присоединены последовательно соединенные реостат и электромотор, общее сопротивление которых $r=5$ Ом. В этих условиях через обмотку электромотора идет ток $I=10$ А. Электромотор отключают, замыкают на сопротивление $R=100$ Ом (включая собственное сопротивление электромотора) и используют в качестве динамо-машины. Определить силу тока i, возбуждаемую в цепи электромотора, если его вращать с прежней угловой скоростью.

390. И. И. Боргман определял магнитную восприимчивость слабомагнитных жидкостей, погружая в эту жидкость две катушки, жестко связанные между собой. Сравнивая э. д. с. индукции, которая возникает в одной из катушек при изменении силы тока в другой, один раз в жидкости, а другой раз в воздухе, можно определить магнитную восприимчивость жидкости. В одном из опытов оказалось, что э. д. с. индукции для катушек, погруженных в раствор хлорного железа, равна $\mathscr{E}_1=24{,}04$ В, а для катушек в воздухе э. д. с. индукции равна $\mathscr{E}_2=24{,}00$ В. Найти магнитную восприимчивость $\varkappa$ раствора.

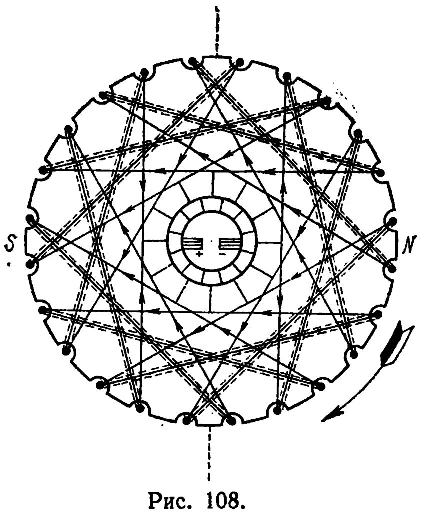


Рис. 108.

391. Якорь мотора имеет барабанную обмотку, состоящую из последовательно соединенных 20 секций, каждая из которых состоит из 30 витков прямоугольной формы (25×20 см²) тонкой проволоки. (Схема обмотки для 12 секций представлена на рис. 108). Якорь находится в однородном

магнитном поле с индукцией 3980 Гс. Якорь включен через коллектор в сеть с постоянным напряжением 120 В, и мотор делает 600 оборотов в минуту. 1) Какова сила тока в якоре (сопротивление якоря 0,5 Ом)? 2) Что произошло бы при внезапной остановке якоря?

392. Медный диск радиуса $a=10$ см вращается в однородном магнитном поле, делая $N=100$ оборотов в секунду. Магнитное поле направлено перпендикулярно к плоскости диска и имеет напряженность $H=10^4$ Э. Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением $R=10$ Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь. Что показывает амперметр?

393. Что будет показывать амперметр в условиях предыдущей задачи, если диск заменить колесом того же радиуса, что и диск, с двумя спицами, как показано на рис. 109? Электрическим сопротивлением материала колеса пренебречь.

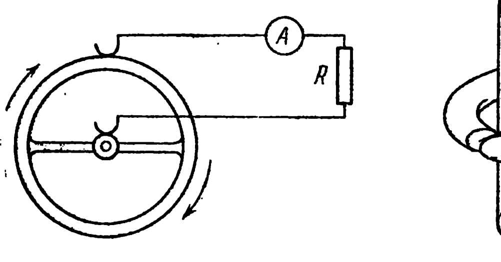


Рис. 109.

Рис. 110.

394. На железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородный магнитный поток $\Phi=\Phi_0 \cos \omega t$, надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 110). В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, образованный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найти напряженность электрического поля E в зазоре в зависимости от расстояния r до оси цилиндра.

395. Полый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω вокруг своей продольной геометрической оси. Вектор индукции магнитного поля $\boldsymbol{B}$ параллелен оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра равна ε. Найти:

1) объемную плотность $\rho_{связ}$ связанных зарядов, появившихся в диэлектрике вследствие вращения в магнитном поле; 2) полный объемный заряд q, приходящийся на единицу длины цилиндра; 3) плотность поверхностных зарядов на обеих поверхностях цилиндра; 4) полный заряд цилиндра.

396. Для измерения сопротивления в абсолютных единицах был предложен следующий способ. Длинная катушка (n витков на единицу длины) включена в цепь с э. д. с. $\mathscr{E}$ и сопротивлением R (рис. 111). Внутри катушки вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к оси длинной катушки, маленькая катушка с числом витков N и сечением S. В моменты, когда индуцированная в малой катушке э. д. с. максимальна, концы катушки замыкаются через гальванометр G на то же сопротивление R. Последнее подбирается так, что тока через гальванометр нет. Определить R.

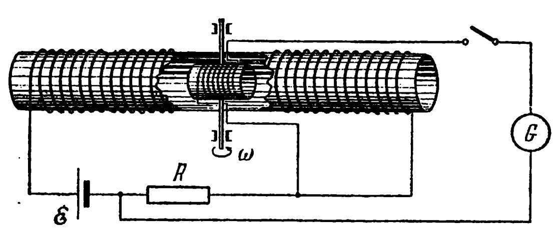


Рис. 111.

397. Как с помощью флюксметра можно измерить магнитное поле внутри длинного соленоида, закрытого с обоих торцов крышками из немагнитного материала, не вводя флюксметр внутрь соленоида? Обмотка соленоида доходит до самых концов цилиндра, на который она намотана.

398. В однородном магнитном поле с индукцией $B=8400$ Гс с небольшой скоростью вращается квадратная рамка со стороной $a=5$ см, состоящая из небольшого числа витков медной проволоки сечением $S=0{,}5$ мм². Концы рамки соединены накоротко. Максимальное значение силы тока, индуцируемого в рамке при вращении, равно $I=1{,}9$ А. 1) Определить число оборотов рамки в секунду. 2) Как нужно изменить скорость вращения рамки, чтобы при замене медной проволоки железной сила тока в цепи осталась неизменной?

399. Внутри достаточно длинного круглого железного стержня магнитный поток равномерно возрастает со вре-

менем. Вне этого стержня магнитного поля нет. Определить характер электрического поля вне железного стержня.

400. В условиях предыдущей задачи стержень окружен витком проволоки, замкнутым на амперметр. Сопротивление витка и амперметра R. 1) Что показывает амперметр? 2) Как направлен ток в витке?

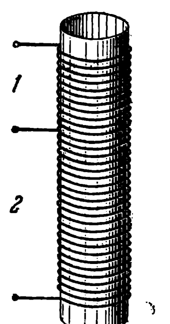


Рис. 112.

401. На некотором расстоянии от железного стержня (см. задачу 399) находится электрон. Начальная скорость его равна нулю. Как он будет двигаться?

402. Однослойная достаточно длинная катушка с железным сердечником разделена на две секции (рис. 112). Измерения индуктивностей секций дали следующие результаты: в первой секции $L_1=0{,}04$ Г, во второй секции $L_2=0{,}09$ Г. 1) Чему равна индуктивность L всей катушки? 2) Сколько витков N в катушке, если в первой секции 100 витков?

403. Как определить индуктивность достаточно длинной катушки, пропуская через нее постоянный ток?

404. Определить индуктивность L проводника, показанного на рис. 113. Ток идет по проволоке диаметром 1 мм, расположенной по оси достаточно тонкой металлической трубки, переходит на дно трубки, к центру которого припаяна проволока, и возвращается обратно по поверхности трубки. Размеры трубки даны на рисунке.

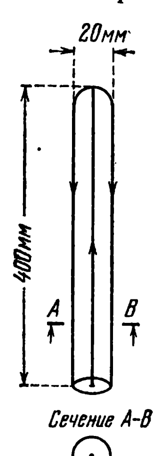


Рис. 113.

405. Один и тот же ток идет по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиуса $r=2$ мм, а расстояние между ними $d=2$ см. Найти индуктивность L единицы длины этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

406. На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности соответственно равны $L_1=0{,}5$ Г и $L_2=0{,}7$ Г. Чему равна взаимная индуктивность M? Рассеяния магнитного поля нет.

407. На длинный цилиндр намотаны вплотную две обмотки $1-1'$ и $2-2'$ так, как показано на рис. 114. Индуктивность каждой обмотки равна 0,05 Г. Чему будет равна индуктивность L всей цепи, если: 1) концы $1'$ и $2'$ соединить, а в цепь включить

концы *1* и *2*; 2) концы *1* и *2'* соединить, а в цепь включить концы *1'* и *2*; 3) концы *1'* и *2'* и *1* и *2* соединить и обе пары концов включить в цепь?

408. На тор, изготовленный из парамагнетика и имеющий регулируемый воздушный зазор d, намотана катушка (рис. 115).

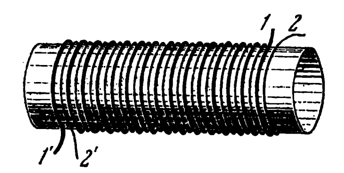


Рис. 114.

Рис. 115.

При $d=0$ индуктивность катушки $L=L_0$, при $d=d_1=1$ мм она вдвое меньше ($L=L_1=L_0/2$). При каком зазоре d индуктивность L будет равна $L_0/4$?

409. Вычислить индуктивность L тороидальной обмотки, намотанной на цилиндр высоты b с внутренним радиусом r и наружным $r+a$ (рис. 116). Число витков катушки равно N, магнитная проницаемость $\mu=1$.

410. В предыдущей задаче по оси катушки протянут бесконечно длинный прямолинейный провод (не показанный на рис. 116). Вычислить взаимную индуктивность M между катушкой и этим проводом.

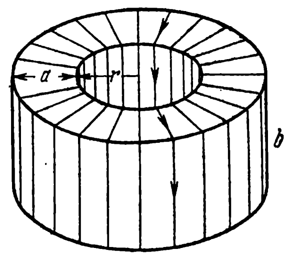


Рис. 116.

411. Внутрь тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушечка с числом витков $n=40$ и площадью витка $S=10$ см², по обмотке которой течет ток $I=1$ А. Длина соленоида $l=50$ см, число витков $N=10\,000$. Определить магнитный поток, который посылает поле катушечки через обмотку соленоида.

Указание. Использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей.

412. На поверхность кругового тора прямоугольного поперечного сечения с размерами $a=17{,}2$ см и $b=5$ см навита обмотка тонкой проволоки, содержащая $N=1000$ витков. (На рис. 117 изображена половина тора. Обмотка не показана.) На тор надета кольцевая катушка K с числом

витков $n=100$, по обмотке которой течет ток силой $I=1$ А. Внутренний радиус тора равен $r=10$ см. Определить магнитный поток, который посылает магнитное поле катушки через обмотку тора.

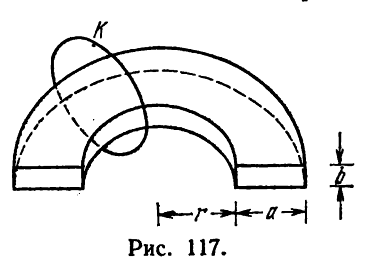


Рис. 117.

413. Чему равна энергия W магнитного поля соленоида, состоящего из N витков проволоки, намотанной в один слой, по которой идет ток силой I? Длина соленоида l, сечение его S (диаметр сечения соленоида мал по сравнению с его длиной).

414. Два параллельных достаточно длинных провода находятся на расстоянии 20 см друг от друга. В них поддерживаются токи каждый силой 20 А, направленные в противоположные стороны. 1) Какую работу на единицу длины проводов совершает магнитное поле при удалении проводов до расстояния 40 см? 2) Как изменится при этом магнитная энергия единицы длины системы двух проводов?

415. В предыдущей задаче магнитное поле совершало положительную работу при удалении проводов друг от друга, а между тем магнитная энергия токов увеличилась. За счет каких источников энергии совершается работа и увеличивается магнитная энергия?

416. Как будет изменяться во времени сила I_0 электрического тока в цепи, параметры которой показаны на рис. 118, после того как ключ K будет замкнут? Омическим сопротивлением всей цепи при рассмотрении начальной стадии процесса установления тока можно пренебречь.

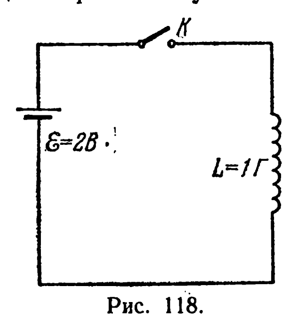


Рис. 118.

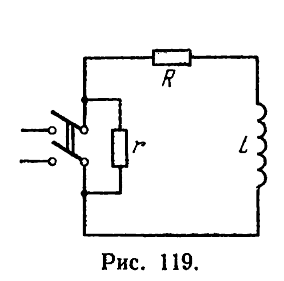


Рис. 119.

417. При отключении цепей постоянного тока, обладающих большой индуктивностью (например, обмоток воз-

буждения генераторов постоянного тока), эти цепи предварительно замыкают на параллельно включенное сопротивление r для ограничения перенапряжений (рис. 119). Определить, во сколько раз в этом случае максимальное напряжение на зажимах цепи $V_{\text{макс}}$ будет превышать приложенное постоянное напряжение V_0.

418. Конденсатор емкостью C присоединен к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга. Однородное магнитное поле напряженности H горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле падает без начальной скорости медный проводник массы m так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Сопротивлением и индуктивностью проводников, а также трением проводника о шины пренебречь. Найти: 1) ускорение проводника; 2) силу тока, заряжающего конденсатор.

419. В условиях предыдущей задачи вместо конденсатора шины замкнуты вверху на соленоид, индуктивность которого равна L, а сопротивление ничтожно мало. Найти закон движения проводника, скользящего вдоль шин.

420. Две длинные параллельные медные шины, расположенные вертикально на расстоянии l друг от друга, замкнуты вверху на сопротивление R и помещены в однородное магнитное поле напряженности H, перпендикулярное к плоскости шин. Вдоль шин падает медный проводник веса P. Трение отсутствует. Чему равно установившееся значение скорости падения?

421. По двум вертикальным идеальным проводам (см. задачу 420) в поле силы тяжести может скользить без трения идеальная проводящая перемычка массы m и длины l (рис. 120). Проводники сверху замкнуты индуктивностью L, а снизу — сопротивлением R. Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка. Найти новое положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

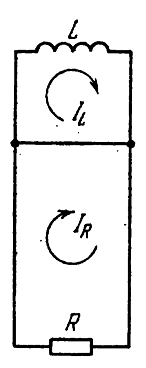


Рис. 120.

422. Найти установившуюся скорость перемычки в условиях предыдущей задачи, если проводники замкнуты сверху последовательно включенными сопротивлением R и индуктивностью L (рис. 121).

423. Маятник длины l и массы m, который можно рассматривать как математический, представляет собой массивный металлический шарик с острием на конце, подвешенный на тонкой проволоке. Острие погружено в чашку с ртутью (рис. 122). Проволока в точке подвеса маятника A и ртуть в чашке включены в цепь, обладающую сопротивлением R. Маятник совершает малые колебания в однородном магнитном поле напряженности H, перпендикулярном к плоскости колебаний маятника. Определить увеличение логарифмического декремента затухания маятника, вызванное сопротивлением R. Сопротивление среды пропорционально угловой скорости маятника, а коэффициент пропорциональности равен k.

Рис. 121.

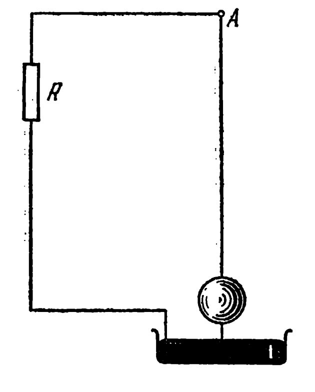


Рис. 122.

424. В условиях предыдущей задачи в цепь вместо сопротивления R включена индуктивность L. Как изменятся логарифмический декремент и период колебаний?

425. В условиях предыдущей задачи в цепь вместо индуктивности включена емкость C. Вопросы те же.

426. На нити висит тонкое медное кольцо радиуса r, массы m и сопротивления R. 1) Найти увеличение логарифмического декремента затухания малых крутильных колебаний кольца, если кольцо помещено в однородное горизонтальное магнитное поле напряженности $\mathbf{H}$, причем вектор $\mathbf{H}$ совпадает с плоскостью кольца в положении равновесия. 2) Изменится ли ответ, если кольцо будет помещено в однородное вертикальное магнитное поле? Индуктивностью кольца пренебречь.

427. Медное кольцо в предыдущей задаче совершает малые крутильные колебания с периодом T. Индуктивность кольца L. Сопротивлением кольца можно пренебречь. Как изменится период этих колебаний, если кольцо поместить в однородное горизонтальное магнитное поле, направление

которого перпендикулярно к плоскости кольца в положении равновесия?

428. Как изменится логарифмический декремент затухания кольца в условиях предыдущей задачи?

429. Прямоугольная рамка ($a \times b$) лежит в одной плоскости с прямым проводником, по которому течет ток I и который расположен параллельно стороне b на расстоянии $d > a$ от ближайшей стороны. Какое количество электричества Q пройдет через любое сечение провода рамки, если она повернется вокруг ближайшей к проводнику стороны b на 180° и останется в этом положении? Сечение проволоки рамки S, удельное сопротивление ρ. Индуктивность рамки не учитывать.

430. В предыдущей задаче предполагалось, что индуктивностью рамки можно пренебречь. Изменится ли ответ задачи, если пренебречь индуктивностью нельзя?

431. В задаче 429 рамка вращается с постоянной скоростью. Будет ли зависеть количество электричества, протекшего через рамку за время полуоборота, от скорости вращения рамки, если сопротивлением рамки пренебречь, а ее индуктивность учесть?

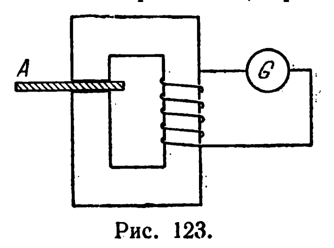


Рис. 123.

432. Баллистический гальванометр включен в цепь катушки, надетой на замкнутый намагниченный сердечник. Железную пластинку A, замыкающую сердечник (рис. 123), быстро удаляют, и гальванометр показывает отклонение в 20 делений. Сопротивление катушки и гальванометра 100 Ом. Чувствительность гальванометра равна 10^{-8} Кл на деление шкалы. Как велико изменение потока индукции $\Delta\Phi$ вследствие удаления пластинки A?

433. Как быстро нужно удалить пластинку A из намагниченного сердечника в предыдущей задаче, чтобы отклонения гальванометра были пропорциональны изменению потока?

434. Какие условия следует наложить на величины индуктивности и сопротивления электрической цепи в задаче 432, чтобы отброс гальванометра был пропорционален изменению потока индукции?

435. Для определения взаимной индуктивности M обмоток трансформатора производится следующий опыт. Первичная

обмотка через сопротивление R_1 известной величины подключается к источнику постоянного напряжения $\mathcal{E}$. Во вторичную цепь включается баллистический гальванометр G, измеряющий полный заряд Q, протекающий во вторичном контуре. Сопротивление R_2 вторичного контура известно. Найти M.

436. Катушка с индуктивностью L, обладающая некоторым сопротивлением r, включена в цепь симметричного моста (рис. 124). В диагональ моста включен баллистический гальванометр. Найти заряд, который протечет через гальванометр после замыкания ключа, если сопротивление гальванометра пренебрежимо мало.

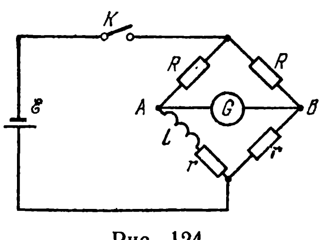


Рис. 124.

437. Рамка, охватывающая площадь $S=1400$ см², состоит из $N=100$ витков проволоки и имеет сопротивление $R=4{,}6$ Ом. Рамка расположена в вертикальной плоскости, перпендикулярной к плоскости магнитного меридиана, и соединена с баллистическим гальванометром чувствительностью $q=2\cdot10^{-6}$ Кл на деление шкалы. Рамку быстро поворачивают вокруг горизонтальной оси, проходящей через ее центр, на угол $\alpha=60°$, так что плоскость рамки становится параллельной направлению магнитного поля Земли. Каково будет отклонение γ гальванометра? Сопротивление гальванометра $r=9{,}4$ Ом. Напряженность магнитного поля Земли $H=0{,}2$ Э.

438. В постоянном однородном магнитном поле, индукция которого B, находится круглое, недеформируемое, достаточно малого сечения кольцо радиуса r из материала, сопротивление которого исчезающе мало. В начальный момент плоскость кольца параллельна направлению магнитного поля и ток в кольце равен нулю. Определить силу тока I в кольце сразу после того, как оно было повернуто так, что плоскость кольца стала перпендикулярна к линиям магнитного поля.

439. В условиях предыдущей задачи 1) найти полный магнитный поток через кольцо после того, как оно было повернуто, 2) вычислить напряженность магнитного поля в центре кольца, 3) качественно изобразить графически распределение напряженности магнитного поля по линии, совпадающей с диаметром кольца.

440. Какова напряженность магнитного поля H и сила тока I в условиях задачи 438 в кольце, если после того, как его повернули перпендикулярно к магнитному полю, внешнее магнитное поле было выключено?

441. Определить работу A, которую необходимо было затратить на поворот кольца в задаче 438.

442. Сверхсильные магнитные поля можно получать взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0. Определить индукцию поля B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0=5\cdot10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R=5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r=0{,}5$ см. Оболочку, окружающую магнитное поле, считать идеально проводящей. Определить также давление P, необходимое для получения такого сжатия.

443. Для измерения взаимной индуктивности двух катушек собирают схему, приведенную на рис. 125. Сопротивления R_1 и R_2 и емкость C конденсатора подбирают так, чтобы гальванометр G оставался на нуле при замыкании и размыкании ключа K батареи $\mathcal{E}$. Чему равна в таком случае взаимная индуктивность M катушек?

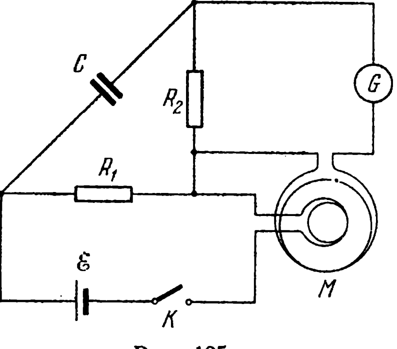
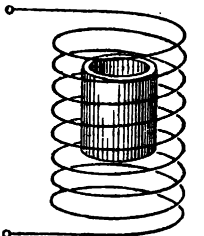


Рис. 125.

444. В предыдущей задаче емкость конденсатора можно изменять скачками величиной c каждый. При этом оказалось, что при значении емкости конденсатора C гальванометр дал отклонение θ в одну сторону, а при значении емкости конденсатора $C+c$ гальванометр дал отклонение θ' в другую сторону, т. е. не удалось добиться нулевого положения стрелки гальванометра. Как из этих измерений определить взаимную индуктивность M катушек? Сопротивление гальванометра $r\gg R_2$.

445. Для удаления газов из металлических частей вакуумных приборов их накаливают токами Фуко в поле катушки высокой частоты (рис. 126). Анод катодной лампы, представляющий собой никелевый цилиндр диаметром $D=8$ мм, высотой $h=2$ см, со стенкой толщиной $a=0{,}1$ мм,

располагается коаксиально с катушкой из $N=15$ витков толстой проволоки, по которой идет ток высокой частоты ($f=10^5$ Гц) силой $I=50$ А. Какое количество тепла Q выделяется ежесекундно в цилиндре? Высота катушки высокой частоты $H=10$ см. Магнитным полем токов Фуко пренебречь. Удельное сопротивление никеля $\rho=7\cdot10^{-6}$ Ом·см.


Рис. 126.

446. Катушкой высокой частоты предыдущей задачи воспользовались для накаливания токами Фуко платинового диска диаметром $D=2$ см и толщиной $d=0,5$ мм. Диск расположен перпендикулярно к оси катушки, и центр диска находится на оси. Магнитным полем токов Фуко пренебречь. Подсчитать количество тепла Q, выделяющегося ежесекундно в диске. Удельное сопротивление платины $\rho=10,7\cdot10^{-6}$ Ом·см.

447. Для уменьшения потерь в железном сердечнике трансформатора сердечник делают из тонких пластинок, изолированных электрически друг от друга. Найти, какое количество тепла Q выделяется в такой пластинке ежесекундно при следующих данных: размеры пластинки $lab=20\times4\times0,01$ см^3; обмотка трансформатора имеет $n=4$ витка на каждый сантиметр длины, и по ней идет 50-периодный ток силой $I=5$ А; магнитная проницаемость железа $\mu=1000$; удельное сопротивление железа $\rho=9\cdot10^{-6}$ Ом·см. Магнитным полем токов Фуко пренебречь.

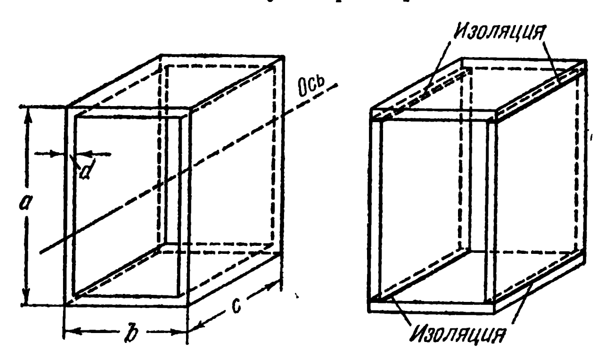


Рис. 127.

448. Сравнить потери W_1 на тепло в металлической коробке, размеры которой приведены на рис. 127, с потерями

W_2 в пластинках, из которых сделана эта коробка, когда пластинки изолированы друг от друга. В обоих случаях коробка помещена внутрь катушки, по которой проходит ток высокой частоты, как в задаче 445, причем ось катушки совпадает с осью коробки и параллельна стороне c. Толщина пластинок d много меньше размеров коробки a и b.

449. Катушка, обладающая омическим сопротивлением $R=1$ Ом и индуктивностью L, с площадью сечения $S=100$ см^2 и числом витков $N=100$, вращается равномерно с угловой скоростью ω в магнитном поле Земли вокруг вертикальной оси, проходящей через одно из оснований катушки перпендикулярно к ее оси (рис. 128). При вращении концы катушки остаются все время присоединенными к обкладкам плоского конденсатора емкостью C. 1) Найти значения I и V для установившегося состояния. 2) Найти условие, при котором в катушке выделяется наибольшее количество тепла в единицу времени. 3) Подсчитать количество тепла Q, выделяющееся в этом случае в единицу времени. Горизонтальная слагающая земного поля $H=0{,}2$ Э.

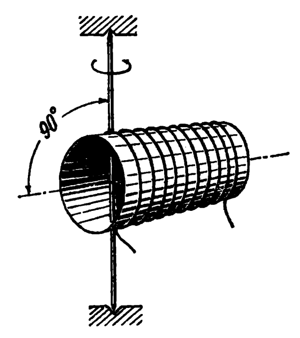


Рис. 128.

450. В условиях предыдущей задачи катушка внезапно останавливается в момент максимального заряда на обкладках конденсатора. 1) Как дальше будет изменяться V, если, кроме второго условия предыдущей задачи, будет еще выполнено условие $L/C=R^2/4$? 2) Чему будет равно количество тепла Q, которое выделится с момента остановки до исчезновения тока в цепи?

451. В плоскости расположены два концентрических проводящих кольца. По внутреннему протекает переменный ток частоты ω. Найти ток во внешнем кольце, если сопротивление его единицы длины ρ и радиус малого кольца r много меньше, чем радиус большого R.

452. Магнитная стрелка, насаженная на вертикальное острие, момент инерции которой J, а магнитный момент $\mathfrak{M}$, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости (рис. 129). Под стрелку подводят расположенный горизонтально круглый диск из меди, ось которого совпадает с осью, вокруг которой колеблется стрелка, и укрепляют на таком расстоянии, что движение стрелки становится

апериодическим. Тогда стрелку останавливают в ее положении равновесия и вращают диск вокруг оси стрелки равномерно с угловой скоростью ω. 1) Какой момент силы M нужно приложить к стрелке, чтобы удержать ее в положении равновесия? 2) Какая мощность N будет при этом выделяться в диске? 3) С каким угловым ускорением $\dot{\omega}$ начнет двигаться стрелка, если ее освободить? 4) Что произойдет дальше со стрелкой, если момент, действующий на стрелку со стороны магнитного поля Земли, будет сравним по порядку величины с моментом, с которым действует на нее вращающийся диск?

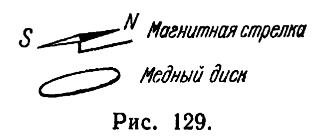


Рис. 129.

453. К катушке с сердечником приложено синусоидальное напряжение $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 \cos \omega t$. Определить графическим способом форму тока, идущего через обмотку, если задана кривая намагничивания материала сердечника, обладающего гистерезисом (рис. 130). Омическим сопротивлением обмотки можно пренебречь.

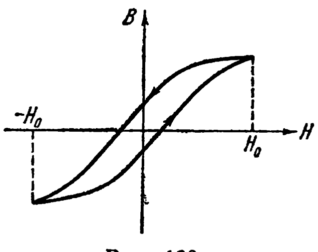


Рис. 130.

454. Почему в катушке Румкорфа, работающей с прерывателем, при большом расстоянии между разрядными электродами, соединенными с концами вторичной обмотки, искра проскакивает только в одном направлении даже при одинаковой форме электродов?

455. Конденсатор емкостью C заряжен до разности потенциалов V и разряжается через сопротивление R. Найти, как меняется со временем энергия конденсатора W. Выразить эту зависимость аналитически и графически.

456. Конденсатор емкостью $C=1$ мкФ разряжается через сопротивление $R=1000$ Ом. Через какое время t от начала разрядки напряжение на пластинах конденсатора уменьшится вдвое?

457. Конденсатор емкостью C заряжается от батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$ через сопротивление R. Определить, как меняется со временем мощность N, подводимая к конденсатору. Построить график зависимости N от времени t.

458. Конденсатор емкостью C заряжается через сопротивление R до разности потенциалов, равной э. д. с. заря-

жающей батареи $\mathscr{E}$. 1) Определить энергию Q, переходящую в тепло при зарядке. 2) Определить к. п. д. η установки, заряжающей конденсатор (полезная энергия — энергия, накопленная в конденсаторе).

459. В предыдущей задаче предполагалось, что начальный ток, т. е. ток в момент включения, $I_0=\mathscr{E}/R$. Между тем до замыкания цепи ток был равен нулю. Следовательно, после замыкания цепи должен был бы мгновенно установиться ток I_0. Возможен ли такой скачок в реальных условиях?

460. Конденсатор заряжается от источника с постоянной э. д. с. $\mathscr{E}$ через сопротивление R и индуктивность L, причем $R^2=4\ L/C$. 1) Как изменяется сила зарядного тока I со временем (построить график)? 2) Через какое время t от начала зарядки сила тока достигает максимума? 3) Чему равна максимальная сила $I_{\text{макс}}$ зарядного тока? 4) Чему равно напряжение V на конденсаторе в этот момент? 5) Чему равен к. п. д. η установки?

461. Конденсатор, заряженный до разности потенциалов V_0, разряжается на цепь, состоящую из сопротивления R и индуктивности L, соединенных параллельно. Найти полный заряд Q, протекающий через каждый из элементов цепи.

462. Две катушки, обладающие сопротивлениями R_1 и R_2 и индуктивностями L_1 и L_2, соединены параллельно. Как распределится между ними заряд Q, протекающий при разряде конденсатора?

463. Конденсатор емкостью C заряжается от батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$ через сопротивление R. Параллельно конденсатору

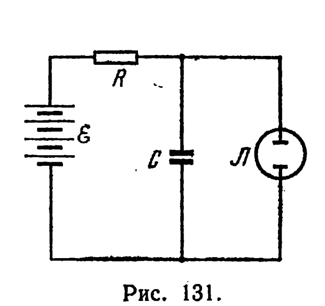


Рис. 131.

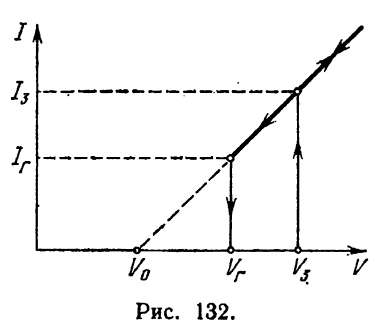


Рис. 132.

присоединена неоновая лампа Л (рис. 131), идеализированная характеристика которой приведена на рис. 132. Процесс зарядки продолжается до тех пор, пока напряжение на

пластинах конденсатора не достигнет значения $V_з$, при котором вспыхивает неоновая лампа. Затем идет процесс разрядки конденсатора до тех пор, пока напряжение на пластинах конденсатора не упадет до значения $V_г$, при котором неоновая лампа гаснет. Затем снова начинается процесс зарядки конденсатора и т. д. Построить график напряжения на пластинах конденсатора в зависимости от времени. Найти продолжительность зарядки t_1 и разрядки t_2 конденсатора, а также период T всего процесса зарядки и разрядки.

464. В разрыв проводящего подвижного диаметра CD (рис. 133) включена неоновая лампа, потенциалы зажигания и гашения которой равны соответственно $V_з > V_г$. Окружность $ACBD$, сопротивление которой мало по сравнению с сопротивлением неоновой лампы (когда она горит), сделана из однородной проволоки постоянного поперечного сечения. Между точками A и B поддерживается постоянное напряжение V. 1) При каких положениях диаметра CD лампа вспыхивает и гаснет? 2) Чему равно минимальное значение напряжения, при котором лампа еще может вспыхнуть?

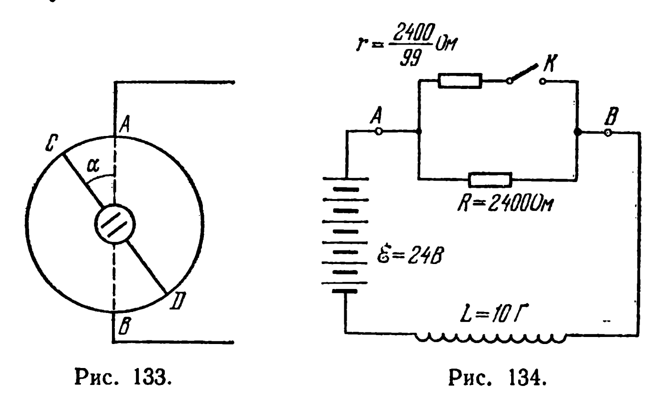


Рис. 133. Рис. 134.

465. Рассмотреть явления, происходящие в схеме, показанной на рис. 134, при замыкании и размыкании ключа K. Найти напряжение V между точками A и B. Активное сопротивление катушки не учитывать.

466. Известно, что конденсатор, присоединенный параллельно ключу, разрывающему цепь, препятствует образованию вольтовой дуги. Для выяснения роли конденсатора подсчитать напряжение V между точками A и B после размыкания ключа K в схеме, показанной на рис. 135.

467. В импульсном электростатическом ускорителе ван-де-Граафа заряженные частицы ускоряются в разрядной

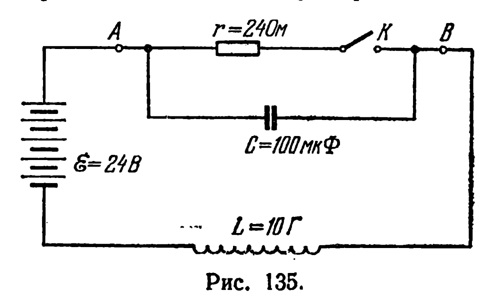


Рис. 135.

трубке, проходя разность потенциалов $V=5$ МВ между заряженным шаром радиуса $R=160$ см и землей. Какой средний ток ускоренных частиц можно получить в течение импульса длительностью $\tau=200$ мкс, если допустимая относительная немоноэнергетичность пучка на выходе не должна превышать $\xi=0{,}5\%$? (Ток подзарядки, переносимый движущейся лентой, пренебрежимо мал по сравнению с током I ускоренных частиц.)

§ 6. Переменный ток. Свободные и вынужденные колебания

468. Для зарядки аккумулятора постоянным током силы I требуется 8 часов. За отсутствием источника постоянного

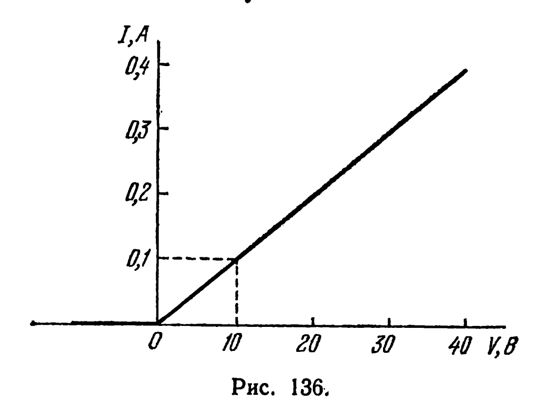


Рис. 136.

тока зарядка ведется от сети переменного тока через двухполупериодный выпрямитель. При этом имеющийся в цепи аккумулятора электродинамический амперметр показывает

ту же силу тока I. Как долго придется заряжать в этих условиях аккумулятор?

469. Характеристика выпрямителя изображена на рис. 136. Выпрямитель работает по двухтактной схеме на чисто омическую нагрузку 100 Ом. Определить величину среднего тока $I_{ср}$, идущего через цепь выпрямитель — нагрузка, если амплитуда э. д. с. равна 40 В.

470. Для нагрева электропечи до нужной температуры требуется при питании постоянным током 5 А. Если через обмотку печи пропускать переменный ток после однополупериодного выпрямителя, то какие показания должны давать включенные в цепь: 1) амперметр постоянного тока; 2) амперметр переменного тока, чтобы печь имела нужную температуру?

471. Вольтметр магнитоэлектрической системы, присоединенной к выпрямителю, показывает 100 В. Каково максимальное значение напряжения, даваемого выпрямителем, если выпрямление: 1) однополупериодное; 2) двухполупериодное?

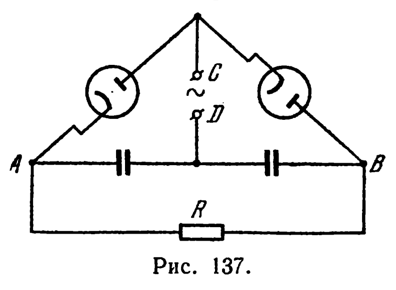


Рис. 137.

472. В выпрямительном устройстве, собранном по так называемой схеме Латура (рис. 137), к точкам C и D подводится переменное напряжение, а с нагрузочного сопротивления R снимается пульсирующее напряжение (через это сопротивление идет ток в одном направлении). Как связано напряжение между A и B с подводимым к C и D напряжением, если сопротивление нагрузки много больше, чем сопротивление конденсатора на данной частоте?

473. Подогревная спираль питается током силы 10 А. Каким значением силы тока надо пользоваться при вычислении максимальной напряженности магнитного поля, создаваемого этим током?

474. В цепь 50-периодного тока включены реостат с сопротивлением $R=10^3$ Ом и катушка индуктивности, состоящая из железного цилиндрического сердечника с обмоткой из $N=400$ витков медного провода. Катушка имеет длину $l=40$ см и диаметр $D=4$ см. В цепи наблюдается сдвиг фазы $\varphi=30°$ между э. д. с. и силой тока. Определить среднюю магнитную проницаемость μ железа сердечника. Сопротивлением обмотки пренебречь.

475. Имеются два одинаковых трансформатора с 220 В на 12 В. Можно ли соединить их так, чтобы получить 6 В?

476. В цепи 50-периодного тока имеются: реостат с сопротивлением $R=100$ Ом, катушка с индуктивностью $L=1$ Г и конденсатор с емкостью $C=1$ мкФ. Чему равен сдвиг фазы φ между током и напряжением на концах всей цепи, в какую сторону сдвинута фаза?

477. В цепи 50-периодного тока находятся реостат и катушка с индуктивностью $L=0{,}1$ Г. Между напряжением и силой тока наблюдается сдвиг фазы $\varphi=30°$. Чему равно сопротивление реостата R и какую емкость C нужно включить последовательно в цепь, чтобы устранить сдвиг фазы?

478. Если конденсатор залит диэлектрической жидкостью, обладающей некоторой проводимостью, то такой конденсатор эквивалентен некоторой емкости C, зашунтированной некоторым сопротивлением R. Какой сдвиг фазы между силой тока и напряжением вызывает включение такого конденсатора в цепь переменного тока частоты ω?

479. Замкнутый проволочный виток с индуктивностью L и сопротивлением R равномерно вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, лежащей в его плоскости, в однородном магнитном поле, перпендикулярном к оси вращения. При каком угле α между направлением поля и плоскостью витка сила тока в витке будет достигать максимума?

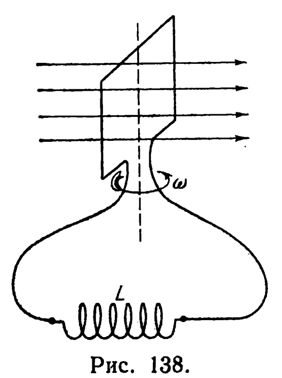


Рис. 138.

480. Квадратная рамка вращается равномерно с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле, перпендикулярном к оси вращения (рис. 138). Концы рамки все время остаются присоединенными к индуктивности L. Омическим сопротивлением цепи можно пренебречь. В каком положении рамки сила тока в ней будет максимальной?

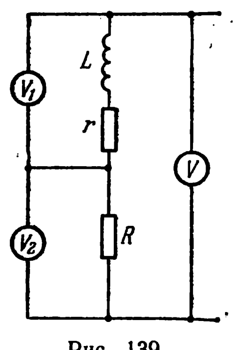
481. В каком положении рамки предыдущей задачи сила тока будет максимальной, если, кроме индуктивности L, в цепь включены последовательно конденсатор C и омическое сопротивление R?

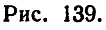
482. Последовательно с конденсатором задачи 478 в цепь переменного тока включена катушка с индуктивностью L. Вследствие этого в цепи исчез сдвиг фазы между силой тока

и напряжением. Чему равно сопротивление диэлектрика конденсатора?

483. Катушка, имеющая индуктивность $L=0{,}3$ Г и сопротивление $R=100$ Ом, включается в цепь 50-периодного тока с эффективным напряжением $V=120$ В. Определить амплитуду тока I, сдвиг фазы φ между током и напряжением в цепи и выделяемую в цепи мощность N.

484. Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L, сопротивление r), применяют иногда метод трех вольтметров, заключающийся в следующем. Последовательно с катушкой включают известное сопротивление R и присоединяют к цепи три вольтметра так, как показано на рис. 139. Измеряют с помощью этих вольтметров эффективные напряжения: V_1 — на катушке, V_2 — на сопротивлении и V — между концами цепи. Определить искомую мощность N.




Рис. 139.

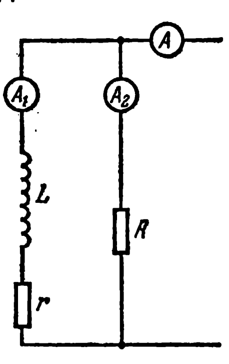


Рис. 140.

485. Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L, сопротивление r), применяют иногда метод трех амперметров, состоящий в следующем (рис. 140). Параллельно катушке включают известное сопротивление R. Измеряют эффективные значения тока: I_1 — через катушку, I_2 — через сопротивление R и полный ток I. Зная показания приборов, определить искомую мощность N.

486. Катушка диаметром 40 см, ось которой находится в горизонтальной плоскости, состоит из $n=1000$ витков тонкой медной проволоки сечением $S=0{,}1$ мм^2. Катушка вращается в магнитном поле Земли вокруг вертикальной оси, проходящей через середину катушки, делая $n=10^3$ оборотов

в минуту. Концы катушки присоединены к внешней цепи, обладающей омическим сопротивлением $R=154$ Ом. Найти мощность N, выделяемую во внешней цепи. Горизонтальная слагающая земного магнитного поля $H=0,2$ Э. Индуктивность катушки не учитывать.

487. Железный сердечник несет на себе две обмотки. Одна обмотка, из большого числа n витков, присоединена к источнику синусоидальной э. д. с. $\mathcal{E}$. Другая обмотка состоит из одного кольца, сопротивление которого R. Точки

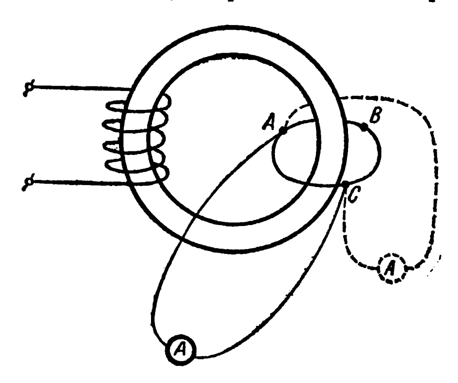


Рис. 141.

A, B и C этого кольца (рис. 141) отстоят друг от друга на равных расстояниях. 1) Если к двум из этих точек присоединить достаточно чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением r, то что он покажет? 2) Как изменится его показание, если перебросить его в положение, указанное пунктиром на рисунке? Железный сердечник не имеет магнитного рассеяния. Индуктивностью кольца и соединительных проводов можно пренебречь.

488. Чем определяется сила тока в кольце в предыдущей задаче, если омическим сопротивлением кольца можно пренебречь?

489. Чему равно полное сопротивление (для переменного тока частоты ω) участка цепи, состоящего из параллельно включенных конденсатора емкостью C и омического сопротивления R?

490. Имеются две самостоятельные цепи. Первая состоит из включенных последовательно источника э. д. с. некоторой частоты, катушки с индуктивностью L и сопротивления R. Вторая — из источника э. д. с. той же частоты и

параллельно включенных конденсатора емкостью C и сопротивления R. При каком соотношении между L, C и R сдвиг фазы между током и напряжением в цепи в обоих случаях будет одинаков по абсолютной величине?

491. Найти э. д. с. и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного цепи, показанной на рис. 142. Считать, что генератор $\mathscr{E}_0$ настроен в резонанс с цепью и что $R \ll \omega L$.

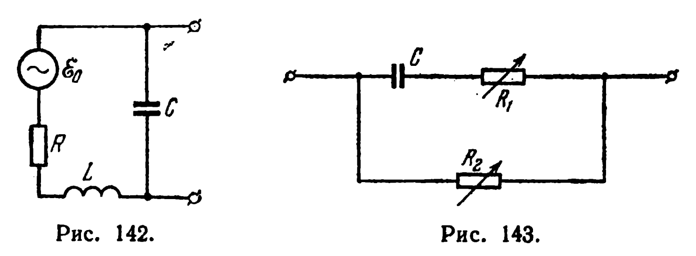


Рис. 142. Рис. 143.

492. Дана схема, приведенная на рис. 143. Будет ли меняться сдвиг фазы между токами в ветвях с изменением: 1) сопротивления R_2; 2) сопротивления R_1?

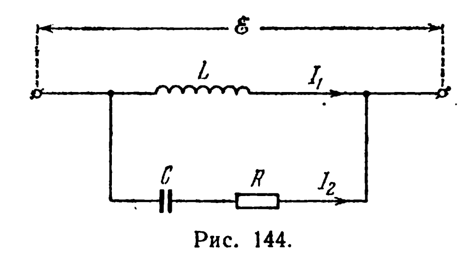


Рис. 144.

493. В схеме, приведенной на рис. 144, даны L, C, R и $I_2 = I_0 \cos \omega t$. Найти $\mathscr{E}$, I_1 и сдвиг фазы φ между $\mathscr{E}$ и напряжением V на конденсаторе.

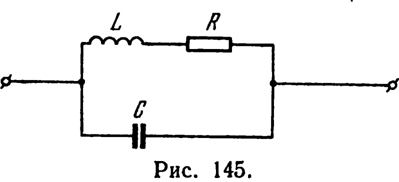


Рис. 145.

494. Определить полное сопротивление r цепи, показанной на рис. 145. Круговая частота переменного тока в цепи равна ω. Определить условие, при котором сопротивление цепи будет максимальным, если $R \ll L\omega$, и найти это максимальное сопротивление $r_{\text{макс}}$.

495. Почему короткое замыкание конденсатора равносильно тому, что его емкость становится бесконечно большой?

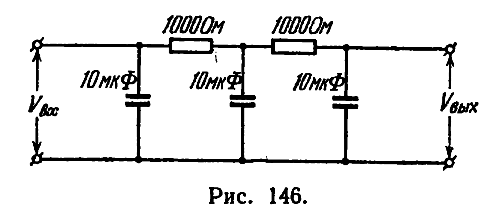


Рис. 146.

496. Задано напряжение на входе фильтра (рис. 146) [1])

$$V_{вх} = (120 \sin 300t + 120 \sin 600t) \text{ В}.$$

Определить зависимость напряжения $V_{вых}$ на выходе от времени.

497. Дана схема, представленная на рис. 147. Сила тока в катушке L_1 колебательного контура $I = 0{,}5 \cos 600t$. Найти э. д. с. $\mathscr{E}$.

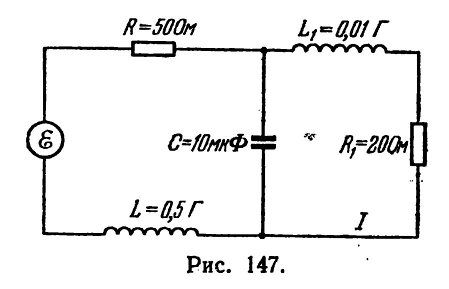


Рис. 147.

498. Показать, что трансформатор без рассеяния (рис. 148, *а*), работающий на чисто омическое сопротивление, представляет собой для внешней цепи такую же нагрузку, как эквивалентная схема, представленная на

---

[1]) В этой и многих последующих задачах в аргументе sin или cos встречается произведение какого-либо числа на *t*. Число, на которое умножается *t*, имеет размерность, обратную времени (т. е. размерность частоты), и выражается в обратных секундах. Поэтому произведение этого числа на *t* есть величина безразмерная. Чтобы не загромождать формул, ни единицы, в которых измеряются эти числа, ни единицы времени не указываются.

рис. 148, *б* (n — коэффициент трансформации). Омическим сопротивлением обмоток трансформатора можно пренебречь.

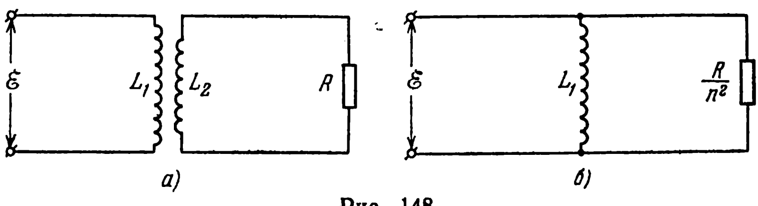


Рис. 148.

499. Цепь переменного тока показана на рис. 149. Определить: 1) сдвиг фазы между напряжением на конденсаторе и током через сопротивление R; 2) сдвиг фазы между током через конденсатор и током через сопротивление R; 3) сдвиг фазы между напряжением на сопротивлении R и э. д. с. $\mathscr{E}$ всей цепи.

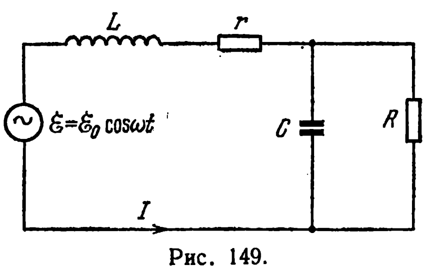


Рис. 149.

500. Переменное напряжение имеет форму, изображенную на рис. 150. Найти эффективное значение такого напряжения $\mathscr{E}_{эфф}$.

501. Ток, идущий через катушку индуктивности, имеет форму, аналогичную указанной на рис. 150. Наибольшее значение силы тока равно I_0. Какова будет величина падения напряжения на индуктивности? Представить графически изменение этой величины за период.

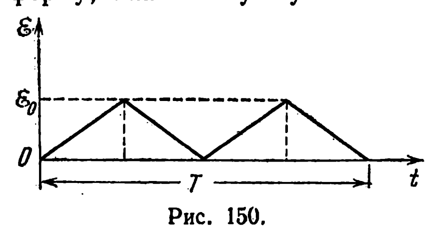


Рис. 150.

502. Конденсатор емкостью $C=0{,}025$ мкФ заряжен до разности потенциалов $V=20$ В и разряжается через проводник с индуктивностью $L=4$ мкГ. Сопротивление цепи $r=1$ Ом. Определить угловую частоту колебаний ω,

логарифмический декремент затухания θ и максимальное значение силы тока I_0.

503. Электрическая цепь, состоящая из катушки ($L=0{,}2$ Г, $R=10$ Ом) и соединенного последовательно с ней конденсатора C, подключена к сети переменного тока ($f=50$ Гц, амплитуда напряжения $\mathscr{E}_0=100$ В). Подобрать емкость так, чтобы напряжение V на зажимах катушки было максимальным, и определить величину этого напряжения.

504. Какова должна быть величина емкости C в предыдущей задаче, чтобы амплитуда силы тока в цепи была равна 1 А?

505. Какова величина емкости C в цепи, описанной в задаче 503, если известно, что амплитуда напряжения на сопротивлении равна 0,1 В?

506. Дана схема, изображенная на рис. 151. Определить: 1) при какой частоте э. д. с. $\mathscr{E}$ в цепи A будет идти ток, а в цепи B он постоянно будет равен нулю; 2) при какой частоте э. д. с. $\mathscr{E}$ в цепи B будет идти ток, а в цепи A он будет постоянно равен нулю. Взаимная индуктивность обеих цепей $M\neq L$.

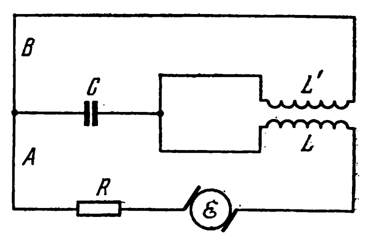


Рис. 151.

507. В схеме предыдущей задачи $L=L'=2M=0{,}01$ Г, $C=1$ мкФ и $R=100$ Ом. Определить амплитуды I_0 и I_0' сил токов в цепях A и B в случаях 1) и 2) предыдущей задачи, если максимальное значение э. д. с. $\mathscr{E}$ равно 100 В; подсчитать в тех же случаях мощность N, расходуемую источником э. д. с.

508. Емкость конденсатора в цепи, показанной на рис. 152, может плавно изменяться в широких пределах. Э. д. с. источника равна $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0 \cos \omega t$. 1) Определить мощность, отдаваемую источником, в зависимости от величины емкости. 2) При каком значении емкости эта мощность будет максимальной и чему она равна?

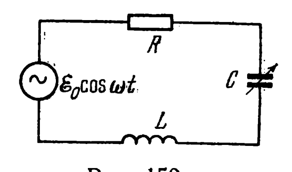


Рис. 152.

509. Генератор посылает энергию по линии в нагрузку. Эффективное напряжение генератора равно $\mathscr{E}$. Сопротивление и индуктивность линии и генератора вместе соответственно равны R_0 и L_0. Сопротивление и индуктивность нагрузки равны R и L. Определить: мощность N, отдаваемую

источником; полезную мощность N' и к. п. д. η всей установки.

510. Определить: мощность N, отдаваемую источником; полезную мощность N' и к. п. д. η для цепи, показанной на рис. 153; э. д. с. источника равна $\mathcal{E}=\mathcal{E}_0 \cos \omega t$.

511. Схема электрической цепи показана на рис. 154, *а*.

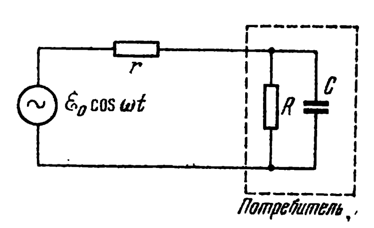


Рис. 153.

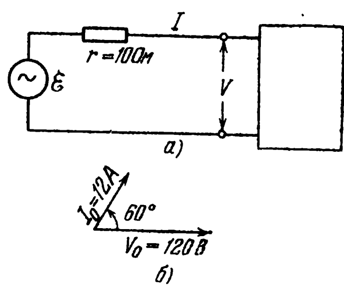


Рис. 154.

Значения амплитуд напряжения, силы тока и сдвига фазы между напряжением и током в цепи нагрузки показаны на рис. 154, *б*. Определить амплитуду э. д. с. источника $\mathcal{E}_0$ и к. п. д. η установки. Каково было бы значение к. п. д. η', если бы при тех же значениях амплитуд напряжения и силы тока нагрузка обладала только омическим сопротивлением?

512. В цепи нагрузки ваттная и безваттная составляющие силы тока равны. Амплитуда напряжения на входных зажимах цепи нагрузки равна $V=100$ В, а амплитуда силы тока $I=10$ А. Определить амплитуду э. д. с. источника, если сопротивление линии и источника $R_0=5$ Ом.

513. Как с помощью амперметра и вольтметра переменного тока можно измерить емкость конденсатора C? Дать схему и расчетную формулу.

514. В сеть 50-периодного переменного тока напряжением в 120 В включили последовательно конденсатор и измерительный прибор, который показал силу тока 240 мА. Чему равна емкость конденсатора C? Сопротивлением прибора и подводящих проводов можно пренебречь.

515. При каком условии можно пользоваться описанным в предыдущей задаче приближенным методом для измерения емкости конденсатора?

516. Как можно просто определить емкость конденсатора, обладающего утечкой, по методу, указанному в задаче 514.

517. Для измерения емкости конденсатора применяют иногда метод моста, показанного на рис. 155. AB — реохорд, S — звуковой генератор (источник переменного тока), T — телефон, C_x— измеряемая емкость, C_1 — эталонный конденсатор. Вывести условия баланса моста (т. е. условия, при которых в телефоне нет звука). Можно ли в схеме моста поменять местами звуковой генератор S и телефон T?

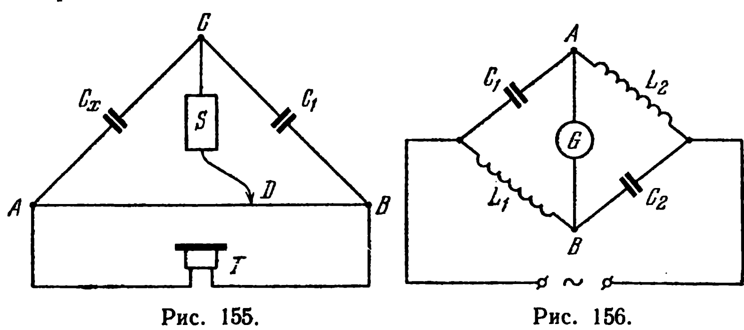


Рис. 155. Рис. 156.

518. Схема моста дана на рис. 156. Можно ли при каких-либо соотношениях величин L и C получить отсутствие тока через прибор переменного тока G?

519. К точкам A и B схемы, изображенной на рис. 157, подводится напряжение $V_1 = V_{10} \sin \omega t$, а с точек M и N снимается напряжение $V_2 = V_{20} \sin (\omega t - \varphi)$. 1) Показать, что при $R_1C_1 = RC$ имеем $V_{10} = V_{20}$, и найти сдвиг фазы φ. 2) Чему будет равно φ, если $R = 1/\omega C$? (Рассматриваемая схема является одной из простейших схем фазовращателей.)

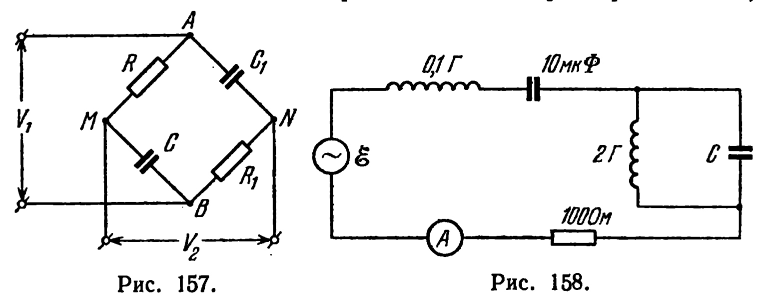


Рис. 157. Рис. 158.

520. В схеме, параметры которой указаны на рис. 158, $\mathscr{E} = 150 \cos 300t$ В. Подобрать величину емкости C так, чтобы сила тока через амперметр A была равна 5 мА.

521. Подобрать индуктивность дросселя L так, чтобы амплитуда напряжения V_2 на выходе фильтра, показанного на рис. 159, при частоте 100 Гц была в 10 раз меньше, чем амплитуда V_1 на входе.

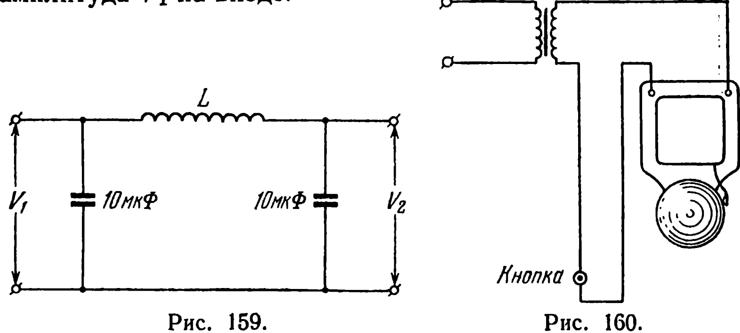


Рис. 159. Рис. 160.

522. Для питания электрического звонка пользуются понижающим трансформатором. Обычно первичная обмотка трансформатора остается постоянно подключенной к сети (рис. 160). За что же платит абонент: за все время присоединения первичной обмотки к сети или за те короткие моменты, когда нажата кнопка звонка? Почему предпочитают включать кнопку во вторичную обмотку трансформатора?

523. Ток холостого хода в первичной обмотке трансформатора (т. е. при разомкнутой вторичной обмотке), питаемый от сети 50-периодного переменного тока с напряжением 220 В, равен 0,1 А. Омическое сопротивление первичной обмотки равно 200 Ом. Определить индуктивность первичной обмотки трансформатора.

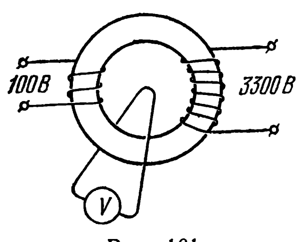


Рис. 161.

524. Трансформатор, повышающий напряжение с 100 В до 3300 В, имеет замкнутый сердечник в виде кольца. Через кольцо пропущен провод, концы которого присоединены к вольтметру (рис. 161). Вольтметр показывает 0,5 В. Сколько витков имеют обмотки трансформатора?

525. Сердечник трансформатора представляет собой тор квадратного сечения со стороной $a=10$ см. Ось тора отстоит от середины поперечного сечения на $d=25$ см. Первичная и вторичная обмотки имеют соответственно $n_1=500$ и

$n_2=10\,000$ витков проволоки. Вторичная обмотка разомкнута. Концы первичной обмотки присоединяют к генератору, и по цепи идет синусоидальный ток круговой частоты $\omega=$ $=314$ с$^{-1}$ и эффективной силы $I=1{,}4$ А. Подсчитать: 1) индуктивность L первичной обмотки; 2) амплитуду напряжения V, создаваемого между концами вторичной обмотки. Сопротивление первичной обмотки $r=0{,}5$ Ом; магнитная восприимчивость материала сердечника $\varkappa=12$.

526. Разделительный трансформатор имеет две одинаковые обмотки, у каждой из которых индуктивное сопротивление на рабочей частоте в $n=5$ раз больше омического. Каково отношение мощностей, потребляемых в первичной цепи при замкнутой и разомкнутой вторичной цепи?

527. В трансформаторе омическое сопротивление первичной цепи в n_1, а вторичной в n_2 раз меньше индуктивного (на рабочей частоте). Найти сдвиг фазы δ между током и напряжением в первичной цепи. Рассеянием магнитного потока в сердечнике трансформатора пренебречь. Получить численный ответ при $n_1=n_2=10$.

528. В цепь батареи постоянного тока включен плоский конденсатор. Расстояние между пластинами конденсатора меняется по гармоническому закону $d=d_0(1+a\cos\omega t)$, где $a\ll 1$. Какой силы ток I будет течь в цепи, если э. д. с. батареи равна $\mathscr{E}$, а площадь пластины конденсатора S? Омическим сопротивлением цепи можно пренебречь, так как оно гораздо меньше $1/C\omega$.

529. Через баллистический гальванометр с баллистической постоянной B пропускается кратковременный импульс тока, в течение которого через него проходит количество электричества q. Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки при установившихся колебаниях. Период (затухающих) колебаний гальванометра T, логарифмический декремент δ.

530. К клеммам A и B (рис. 162) подводится произвольное переменное напряжение $V_{\text{вх}}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{\text{вых}}(t)$. Параметры

R, L, C подобраны таким образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Показать, что при выполнении этого условия выходное напряжение на схемах *1* и *2* приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах *3* и *4* — производной от входного напряжения по времени.

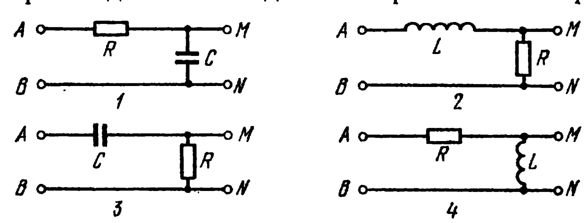


Рис. 162.

531. С помощью схемы, показанной на рис. 163, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{вх}$ и напряжением на выходе $V_{вых}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L, если круговая частота входного напряжения равна ω? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

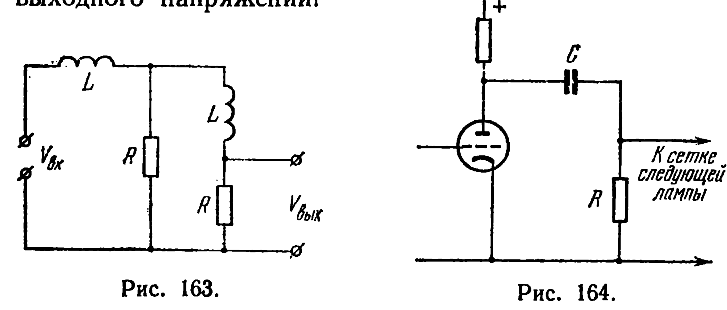


Рис. 163.

Рис. 164.

532. Колебания напряжения на аноде усилительной лампы подаются в цепь сетки следующей лампы через «разделительный конденсатор» C (рис. 164), который защищает цепь сетки следующей лампы от попадания на нее постоянного анодного напряжения. Для того чтобы электроны, попадающие на сетку следующей лампы, могли возвращаться к катоду, между сеткой и катодом включается сопротивление R («утечка сетки»). Подсчитать минимальную емкость C разделительного конденсатора, если $R = 1$ МОм, усилитель

предназначен для частот от $5 \cdot 10^5$ до $15 \cdot 10^5$ Гц и потеря напряжения на конденсаторе во всем этом диапазоне частот не должна превышать 0,1%.

533. Для передачи только переменной составляющей напряжения V_1 в цепь включен конденсатор C. Напряжение V_2 снимается с сопротивления R (рис. 165). Определить наименьшую величину емкости конденсатора из условия, что потери напряжения должны быть не более 5% в диапазоне частот от 50 до 10 000 Гц. Сопротивление R=0,5 МОм.

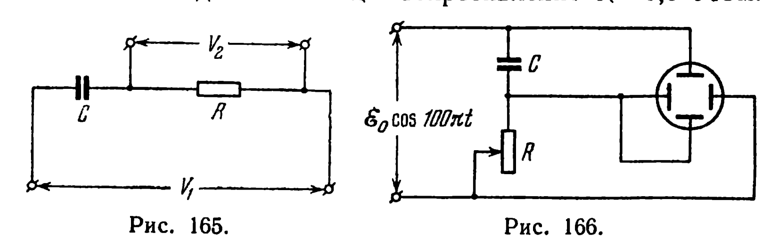


Рис. 165. Рис. 166.

534. Напряжение с частотой 50 Гц подводится к отклоняющим электродам катодного осциллографа через цепь, показанную на рис. 166. Емкость конденсатора C равна 0,5 мкФ. Найти величину сопротивления R, при которой на экране осциллографа будет: 1) круг; 2) эллипс, у которого одна ось вдвое больше другой.

535. Определить отношение большой полуоси эллипса в предыдущей задаче к радиусу круга.

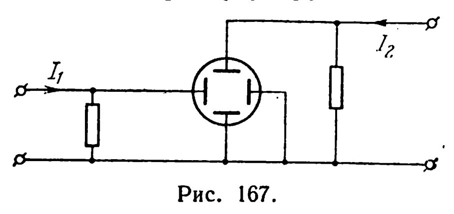


Рис. 167.

536. Измерение величины сдвига фазы между токами можно произвести с помощью катодного осциллографа по схеме рис. 167. 1) Как осуществить это измерение? 2) Можно ли этим способом определить знак сдвига фазы?

537. В ответе предыдущей задачи указан способ определения сдвига фазы между двумя токами. Этот способ недостаточно точен. Более точно можно определить сдвиг фазы по положению главных осей эллипса. Найти выражение угла сдвига фазы через длину и наклон полуосей эллипса.

538. С помощью схемы с катодным осциллографом, изображенной на рис. 168, принципиально можно измерить мощность, потребляемую в цепи (R, L, r). Как осуществить это измерение? Какие данные необходимы для такого измерения?

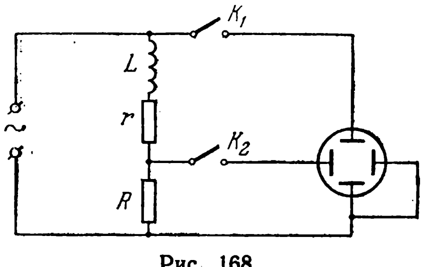


Рис. 168.

539. В электрической цепи, показанной на рис. 169, *а* (соединение треугольником), даны напряжения между точками *1*, *2*, *3* и сопротивления r_{12}, r_{23}, r_{13}. Найти сопротивления R_1, R_2, R_3 в плечах «эквивалентной» цепи, показанной на рис. 169, *б* (соединение звездой). (Условие «эквивалентности» состоит в том, что при том же падении напряжения между каждой парой точек *1*, *2*, *3* в обеих схемах через эти точки протекают одинаковые токи.)

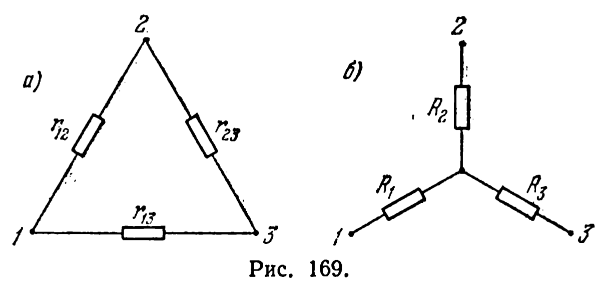


Рис. 169.

540. Прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси $\varphi=\varphi_0 \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами подсоединен к конденсатору емкости C (опыт Мандельштама и Папалекси). Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного контура $\omega_0=\sqrt{1/(LC)}$. Радиус соленоида a, длина проволоки, из которой он изготовлен, l, сопротивление соленоида R.

541. Упрощенная схема электродинамометра изображена на рис. 170. Прибор состоит из неподвижной катушки (выводы a, b), расположенной вертикально; коаксиально с этой катушкой подвешена на пружине вторая катушка (выводы a', b') с прикрепленной к ней тарелочкой с разно-

весами. Если концы катушек b и b' соединяют и пропускают постоянный ток I от a к a', то на чашку весов нужно добавить 20 г, чтобы положение катушки $a'b'$ не изменилось, т. е. чтобы указатель A не сместился из нулевого положения. Определить, какую массу m нужно добавить на чашку, чтобы положение катушки $a'b'$ не изменилось, если через катушку ab проходит переменный 50-периодный ток силы 2 А, а через катушку $a'b'$ — той же частоты переменный ток силы 0,5 А, но сдвинутый по фазе относительно первого на 30°.

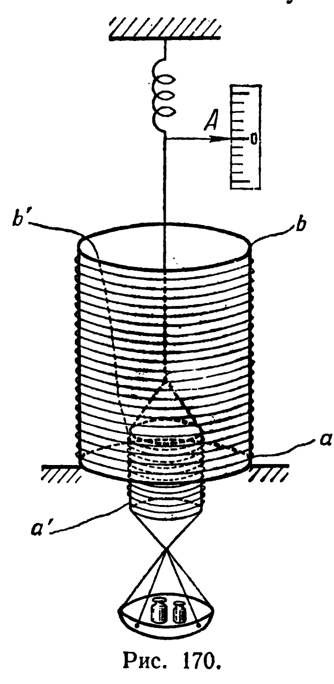


Рис. 170.

542. Прибор состоит из двух взаимно перпендикулярных катушек, одна из которых (внешняя) укреплена неподвижно, а вторая подвешена на нити внутри первой (рис. 171). Конец обмотки первой катушки b соединяют с a' и через обе катушки пропускают 50-периодный переменный ток силой I_1, вследствие чего внутренняя катушка поворачивается. Поворотом головки A на α_1 делений влево возвращают катушку в начальное (перпендикулярное к неподвижной катушке) положение. Затем пропускают ток той же частоты, но силой I_2 и поворотом головки на α_2 делений влево снова возвращают катушку в начальное положение. Наконец, ток I_1 пропускают через первую катушку от a к b, а ток I_2 — через вторую от a' к b', и тогда головку нужно повернуть на α_3 делений вправо,

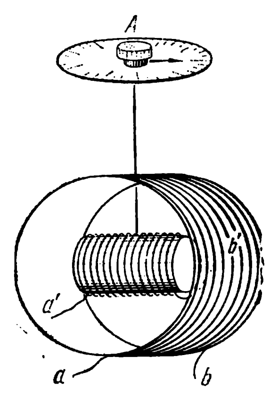


Рис. 171.

чтобы катушка осталась на месте. Считая угол закручивания нити пропорциональным моменту сил, определить сдвиг фазы между токами I_1 и I_2, если $\alpha_1 = 14°5'$; $\alpha_2 = 10°$; $\alpha_3 = 6°$.

543. Как изменятся углы закручивания нити в предыдущей задаче во всех опытах, если: 1) концы обеих катушек поменять местами; 2) переменить концы только у одной из катушек? 3) Возможно ли с помощью данного прибора определить, в какую сторону сдвинута фаза I_2 относительно I_1?

544. Как будет изменяться со временем ток I в цепи, представленной на рис. 172, *а*, после замыкания ключа *K*?

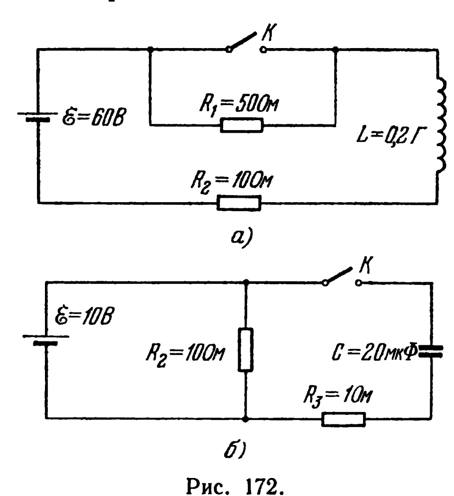


Рис. 172.

545. Определить закон изменения силы тока I через батарею ℰ после замыкания ключа *K* в схеме, показанной на рис. 172, *б*. Вычертить кривую изменения силы тока при замыкании ключа.

546. Электрическая цепь состоит из батареи, конденсатора и катушки индуктивности (рис. 173). Определить силу тока I в цепи как функцию времени, считая, что замыкание ключа *K* произошло в момент $t = 0$. Величины параметров цепи указаны на рисунке. Омическим сопротивлением батареи и остальной цепи пренебречь.

Рис. 173.

547. Определить закон изменения напряжения V на конденсаторе C после замыкания ключа K в основной цепи схемы, представленной на рис. 174.

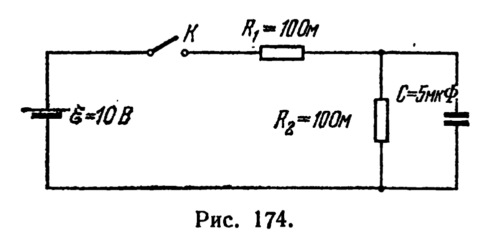


Рис. 174.

548. Последовательно соединенные дроссель L и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного тока с э. д. с. $\mathscr{E}$. Полное омическое сопротивление цепи равно R. Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железный сердечник, равна L_1. Индуктивность того же дросселя без железного сердечника L_2. Вначале сердечник был вставлен. В момент времени $t=0$, когда ток в цепи уже установился, очень быстро вынимают железный сердечник (в течение времени, пренебрежимо малого по сравнению с временем установления тока). Определить силу тока I в цепи в зависимости от времени t для $t>0$.

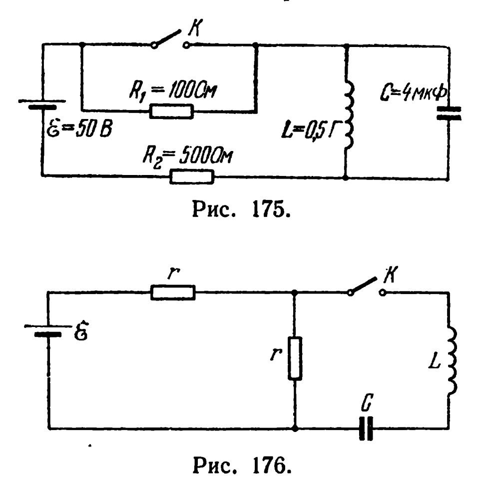


Рис. 175.

Рис. 176.

549. Схема электрической цепи показана на рис. 175. Определить напряжение V на конденсаторе C как функцию времени после того, как в момент $t=0$ замкнут ключ K.

550. Для схемы, представленной на рис. 176, определить заряд q на конденсаторе C как функцию времени после включения ключа K.

551. Для схемы, представленной на рис. 177, определить, как изменяется сила тока I через катушку индуктивности после замыкания ключа K. Параметры цепи обозначены на рисунке.

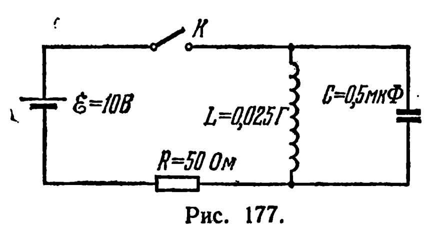


Рис. 177.

552. Вместо батареи в электрическую цепь задачи 545 включен источник синусоидальной э. д. с. с частотой 10 периодов в секунду. Ключ K замыкается в тот момент, когда э. д. с. достигла максимального значения. Амплитуда э. д. с. равна 10 В. Определить напряжение на конденсаторе V как функцию времени.

553. Источник синусоидальной э. д. с. $\mathcal{E}=100\sin 100\pi t$ В подключают в момент $t=0$ к катушке, обладающей индуктивностью $L=1$ Г (рис. 178). Определить силу тока I в цепи. Внутренним сопротивлением источника э. д. с. и активным сопротивлением катушки и соединительных проводов пренебречь.

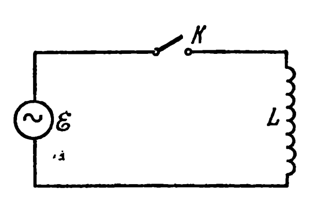


Рис. 178.

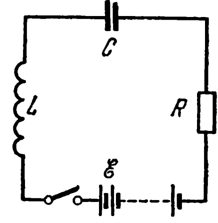


Рис. 179.

554. К контуру L, C, R (рис. 179) с малым затуханием в момент $t=0$ подключают источник постоянной э. д. с. $\mathcal{E}$ с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Определить напряжение V на конденсаторе C в зависимости от времени t. На какое минимальное напряжение должен быть рассчитан конденсатор?

555. Катушка с индуктивностью L, конденсатор с емкостью C и батарея с э. д. с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r соединены параллельно (рис. 180). Найти силу тока

$I(t)$ в катушке после включения батареи. Параметры L, C, r удовлетворяют условию $L<4Cr^2$.

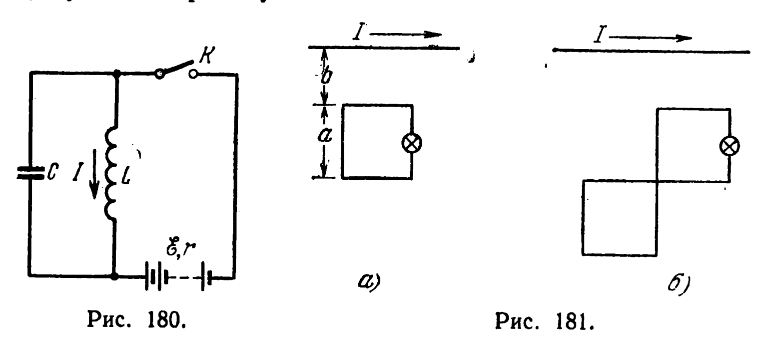


Рис. 180.

Рис. 181.

556. По длинному прямому проводу течет синусоидальный ток I высокой частоты $\nu=10^8$ Гц. К проводу подносится квадратный проволочный контур со стороной $a=17{,}2$ см, в который включена лампочка (рис. 181, *а*). Когда контур поднесен на расстояние $b=10$ см, лампочка горит нормальным накалом. 1) Определить эффективное значение силы тока в проводе $I_{эфф}$, если для нормального накала лампочки требуется постоянное напряжение $V=6$ В. 2) Уменьшится или увеличится напряжение на лампочке и во сколько раз, если квадрат заменить двойным квадратом, изображенным на рис. 181, *б*? Сопротивлением контуров пренебречь.

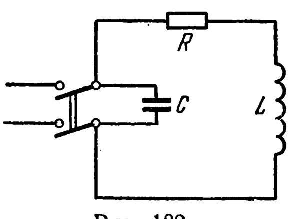


Рис. 182.

557. Цепь, состоящая из последовательно соединенных сопротивления R и большой индуктивности L, присоединена к источнику постоянного тока, поддерживающего на зажимах постоянное напряжение V_0. Для ограничения перенапряжений во время отключения источника параллельно с цепью включен конденсатор емкости C (рис. 182). Определить напряжение на конденсаторе $V(t)$ после отключения источника постоянного напряжения. Параметры контура удовлетворяют условию $4L>CR^2$.

558. В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока $I=I_0\cos\omega t$, где $\omega^2=1/LC$. Катушкой индуктивности служит прямая длинная проволочная спираль.

Как изменятся частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t=0$ очень быстро (т. е. в течение времени, малого по сравнению с периодом колебаний $T=2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объяснить, почему при этом меняется энергия колебаний.

559. К источнику синусоидального напряжения $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0\cos(\omega t+\delta)$ в момент времени $t=0$ подключаются последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L. Найти силу тока I в цепи в зависимости от времени. При каком условии после замыкания цепи в ней сразу установятся синусоидальные колебания?

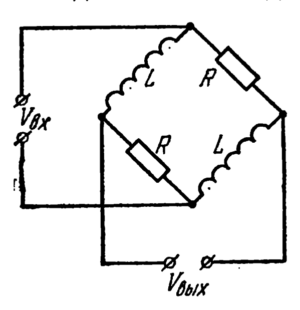


Рис. 183.

560. На вход схемы, изображенной на рис. 183, подается синусоидальное напряжение частоты ω. Исследовать зависимость амплитуды и фазы выходного напряжения от величины сопротивления R.

561. Колебательный контур содержит конденсатор с утечкой. Это значит, что небольшая часть тока, поступающего на одну из обкладок конденсатора, проходит через диэлектрик на другую обкладку. Емкость конденсатора равна C, его сопротивление R. Пренебрегая сопротивлением катушки индуктивности и прочих проводов и предполагая, что выполнено условие квазистационарности, вывести уравнение собственных колебаний колебательного контура. Найти собственную частоту ω_0 и коэффициент затухания γ.

Рис. 184.

562. Два одинаковых проволочных кольца радиуса r каждое расположены так, как указано на рис. 184. Расстояние l между центрами колец велико по сравнению с r. В кольце *1* поддерживается переменный ток $I=I_0\cos\omega t$. Найти среднее значение и направление силы F взаимодействия между кольцами. Индуктивность одного кольца равна L, омическое сопротивление R. Исследовать два предельных случая: 1) $\omega L\gg R$; 2) $\omega L\ll R$.

563. Схема цепи показана на рис. 185. В момент времени $t=0$ замыкают ключ K. Определить силу тока, идущего через сопротивление, и напряжение на конденсаторе. Амплитуда э. д. с. $\mathscr{E}_0=100$ В, частота $\omega=200\pi$ с$^{-1}$, осталь-

ные данные приведены на рисунке. Внутренним сопротивлением источника э. д. с. пренебречь.

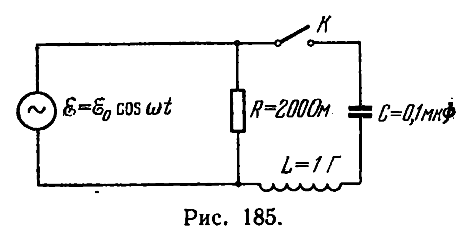


Рис. 185.

564. В схеме, приведенной на рис. 186, в момент $t=0$ включают ключ K. Определить зависимость от времени падения напряжения V на сопротивлении. Дано: $\mathcal{E}_0=100$ В, $\omega=100\pi$ с$^{-1}$; параметры цепи указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением источника э. д. с. пренебречь.

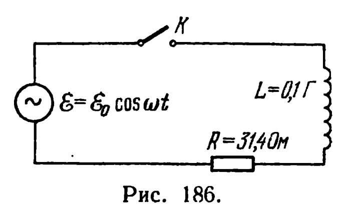


Рис. 186.

565. В цепь переменного тока с напряжением $\mathcal{E}=440$ В и частотой $\nu=50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка индуктивности. Лампочка рассчитана на 110 В и 1 А. При замене лампочки другой, рассчитанной на 220 В и 0,8 А, оказалось, что новая лампочка горит также нормальным накалом. Найти индуктивность L и сопротивление R катушки.

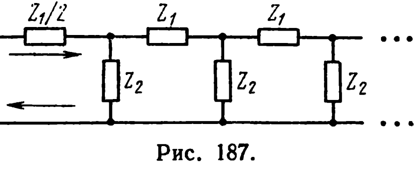


Рис. 187.

566. Найти комплексный импеданс Z бесконечной цепочки, изображенной на рис. 187.

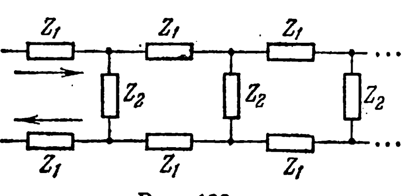


Рис. 188.

567. Решить предыдущую задачу в предположении, что все импедансы, из которых составлена цепь,— чисто мнимые (состоят из катушек индуктивности и конденсаторов).

568. Найти импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 188.

569. Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиуса R. Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Конденсатор включен в цепь переменного тока $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе. Найти отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. Расстояние между обкладками конденсатора d. Провести численный расчет для $R = 10$ см, частоты $\nu = 100$ Гц и $\varepsilon = \mu = 1$.

570. Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Длина соленоида равна l, радиус R. По обмотке соленоида течет переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энергий. Провести численный расчет для $R = 5$ см, $\varepsilon = \mu = 1$ и частоты $\nu = 100$ Гц.

571. Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми обкладками заряжены одинаковыми количествами электричества. Расстояние между обкладками у первого конденсатора вдвое больше, чем у второго. Как изменится электрическая энергия системы, если второй конденсатор вставить между обкладками первого? Считать, что толщина самих обкладок пренебрежимо мала. Рассмотреть два случая: 1) когда конденсаторы одноименными зарядами ориентированы в одну сторону; 2) когда они ориентированы противоположно.

572. К плоскому воздушному конденсатору, обкладки которого имеют форму дисков с зазором $d = 1$ см между ними, приложено синусоидальное напряжение $V = V_0 \cos \omega t$ с амплитудой $V_0 = 300$ В и круговой частотой $\omega = 3 \cdot 10^6$ с$^{-1}$. Найти амплитуды полей H_0 и B_0 на расстоянии $r = 1$ см от оси конденсатора, если это расстояние меньше радиуса обкладок конденсатора. Как изменятся эти амплитуды, если зазор между обкладками заполнить однородным диэлектриком с $\varepsilon = 10$ и $\mu = 100$?

573. В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см, содержащем $n = 10$ витков/см, течет ток, нарастающий с постоянной скоростью $\dot{I} = 100$ А/с. Какова

будет форма силовых линий соответствующего ему вихревого электрического поля E? Найти величину E на расстоянии $r=2r_0$ от оси соленоида. Как изменится поле E и индукция D, если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$?

574. Электрическая цепь представлена на рис. 189. Определить силу тока I через сопротивление R_1 после того, как в момент $t=0$ замыкают ключ K. Амплитуда э. д. с. равна 100 В, частота 250π с$^{-1}$. Параметры цепи указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением источника э.д.с. пренебречь.

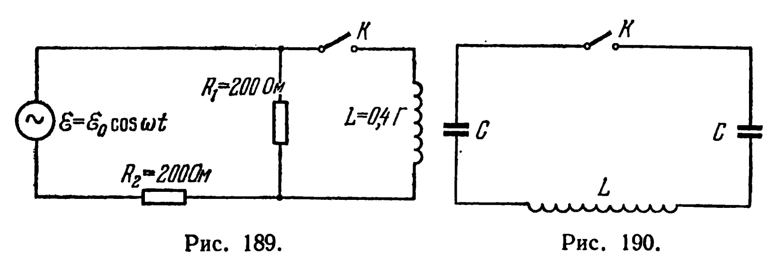


Рис. 189. Рис. 190.

575. Цепь состоит из соединенных последовательно двух одинаковых конденсаторов, каждый емкостью C, и катушки с индуктивностью L (рис. 190). При разомкнутом ключе K один из конденсаторов заряжают до разности потенциалов V. Затем источник отключают. Определить закон изменения во времени зарядов на конденсаторах после замыкания ключа K.

576. Какой должна быть взята величина индуктивности L катушки, которую надо включить параллельно конденсатору емкости $C=10$ мкФ, чтобы получившийся контур был настроен в резонанс на 50-периодный ток?

577. Колебательный контур состоит из катушки длины $l=40$ см, диаметра $D=4$ см, на которую намотана виток к витку проволока толщиной $a=1$ мм, и батареи из 10 плоских конденсаторов, соединенных параллельно, пластины которых имеют размеры $m\times n=20\times 15$ см^2 и отделены друг от друга слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=5$ и толщиной $d=0{,}1$ мм. Найти приближенно собственный период колебаний контура T.

578. Чему равна длина электромагнитной волны λ, соответствующая собственной частоте колебаний контура,

состоящего из катушки с индуктивностью $L=0{,}4$ Г и конденсатора емкостью $C=10^4$ см?

579. Какова должна быть емкость конденсатора C, чтобы с катушкой, имеющей индуктивность $L=25$ мкГ, обеспечить настройку в резонанс на длину волны $\lambda=100$ м?

580. Найти связь между амплитудами тока I_0 и напряжения V_0 при свободных колебаниях в контуре, состоящем из катушки с индуктивностью L и конденсатора емкости C.

581. На колебательный контур, состоящий из последовательно включенных конденсатора емкости $C=0{,}1$ мкФ, катушки с индуктивностью $L=0{,}01$ Г и сопротивления $R=10$ Ом, действует внешняя э. д. с. с амплитудой 10 В. Чему равна частота f э. д. с., включенной последовательно в контур, если известно, что амплитуда силы тока, протекающего в контуре, равна 1 А?

582. На колебательный контур с собственной частотой ω_0 и логарифмическим декрементом затухания $\theta=0{,}02$ действует внешняя периодическая сила с постоянной амплитудой. Частота ω внешней силы, вначале равная частоте собственных колебаний, изменяется настолько, что мощность, расходуемая в контуре, падает вдвое. Определить изменение частоты в процентах к собственной (или резонансной) частоте ω_0.

583. В колебательном контуре имеется катушка с индуктивностью L и сопротивлением R. Эту катушку желают заменить двумя катушками с индуктивностями L_1 и L_2 и сопротивлениями R_1 и R_2. Каким условиям должны удовлетворять эти параметры катушек, чтобы период и затухание собственных колебаний в контуре не изменились? Рассмотреть случаи последовательного и параллельного включений катушек (взаимную индуктивность катушек считать равной нулю).

584. Если в качестве антенны пользуются городской осветительной сетью, то между сетью и приемником необходимо включить разделительный конденсатор. Зачем это делается и чему должна быть равна емкость такого разделительного конденсатора?

585. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки с индуктивностью $L=1$ Г. Чему равно омическое сопротивление контура, если известно, что амплитуда собственных колебаний в нем за 0,05 с уменьшается в $e=2{,}7$ раза?

586. Через сколько периодов колебаний амплитуда их уменьшается в $e=2,7$ раза в колебательном контуре, у которого $L=1$ Г, $C=0,5$ мкФ и $R=30$ Ом?

587. Что характеризует собой коэффициент затухания контура $\delta=R/(2L)$? Что характеризует собой логарифмический декремент контура $\theta=\pi R\sqrt{C/L}$?

588. В колебательном контуре с малым затуханием одновременно увеличивают емкость конденсатора и индуктивность катушки в одно и то же число раз, равное n. Увеличение производится в произвольный момент за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти соотношение между амплитудами токов I_0 и I_0' до и после изменения параметров контура.

589. Найти ток I (в установившемся режиме) в цепи, изображенной на рис. 191. При какой частоте ω амплитуда установившихся колебаний будет максимальна и при какой минимальна? Чему равны максимум и минимум тока?

Рис. 191.

590. Генератор с синусоидальной э. д. с. замкнут на активное сопротивление R и реактивное X, соединенные параллельно. Убрав R и X, тот же генератор замыкают на активное сопротивление r и реактивное x, соединенные последовательно. При каком условии амплитуда и фаза тока останутся неизменными? X и x — величины вещественные.

591. Катушка колебательного контура с параметрами L, C, $R=0$ помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней постоянный магнитный поток Φ_0. В момент времени $t=0$ магнитное поле выключается. Время выключения τ пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти ток I в контуре в зависимости от времени после выключения поля.

592. В колебательном контуре с индуктивностью $L=1$ Г, настроенном в резонанс, под действием внешнего синусоидального напряжения с амплитудой $V_0=200$ В установился переменный ток с амплитудой $I_0=20$ А. Найти сопротивление контура R и время затухания τ (уменьшения амплитуды колебаний в e раз) в режиме свободных затухающих колебаний.

593. При изменении частоты ν вынуждающей силы, действующей на линейную колебательную систему, меняется

фаза δ установившихся колебаний этой системы и запасенная в ней энергия W. Пусть при малом сдвиге частоты от резонансной $\Delta\nu=1$ Гц фаза колебаний δ изменилась на $\pi/4$. Как изменится при этом энергия W? Каково время затухания τ системы в режиме свободных колебаний?

594. Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1, C, R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2. Взаимная индуктивность между катушками равна M. Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления. При каком условии резонанс недостижим?

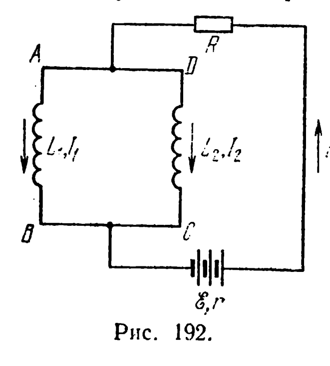


Рис. 192.

595. Сверхпроводящие катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены в цепь гальванической батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 192). Найти установившиеся токи в катушках I_1 и I_2 и ток в общей цепи I, если взаимной индуктивностью катушек можно пренебречь.

596. Колебательный контур имеет следующие параметры: $L=40$ мкГ, $C=270$ пФ и $R=8$ Ом. Определить время, за которое амплитуда собственных колебаний уменьшится в e^2 раз.

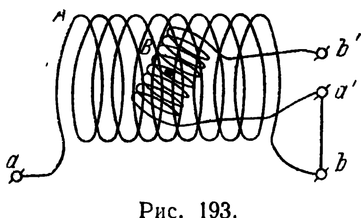


Рис. 193.

597. В радиотехнике применяют вариометры, индуктивность которых можно изменять в известных пределах. Одна из схем вариометра приведена на рис. 193. Внутри неподвижной катушки A находится катушка B, которая может поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной к осям обеих катушек. Индуктивность катушки A равна 1000 мкГ, а катушки B равна 400 мкГ. Максимальная взаимная индуктивность между катушками равна 500 мкГ. Определить максимальную и минимальную индуктивности вариометра, когда его катушки соединены последовательно, т. е. индуктивность цепи между a и b'.

598. Даны две катушки индуктивности, расположенные неизменно одна относительно другой, и мостик для измерения индуктивности. Как можно, пользуясь этим прибором, определить взаимную индуктивность M между катушками?

599. В колебательный контур включен последовательно источник синусоидальной э. д. с. постоянной амплитуды. Оценить приближенно напряжение на катушке индуктивности и напряжение на емкости при очень малых и очень больших частотах (по сравнению с собственной частотой контура), пренебрегая внутренним сопротивлением источника.

600. Внешняя э. д. с. $\mathscr{E}$ действует на колебательный контур (рис. 194). Определить силу тока I и сдвиг фазы φ между I и $\mathscr{E}$ при резонансе.

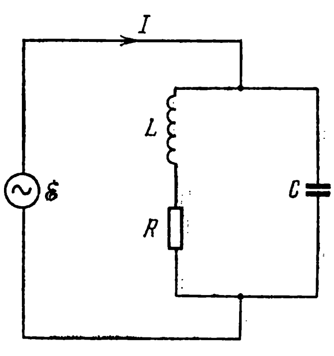


Рис. 194.

601. В цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R, индуктивности L и емкости C, включен последовательно источник синусоидальной э. д. с. постоянной амплитуды и переменной частоты. Изменяя частоту источника, настраивают ее в резонанс с частотой цепи, затем уменьшают емкость контура в два раза и снова добиваются резонанса. Изменится ли сила тока при резонансе? Каково отношение резонансных частот, соответствующих первому и второму случаям?

602. Как изменится мощность, расходуемая при резонансе источником э. д. с. в задаче 600, если индуктивность контура будет увеличена вдвое, а емкость уменьшена вдвое, причем $L\omega \gg R$? Частота и амплитуда э. д. с. все время остаются постоянными.

603. Показать, что в контуре задачи 601 амплитуда силы тока I при отклонении частоты внешней э. д. с. на небольшую величину Δf [1]) от резонансной частоты f_0 будет связана с амплитудой силы тока при резонансе I_0

---

[1]) Δf называется «расстройкой», а $\Delta f/f_0$ — «относительной расстройкой» частоты.

следующим соотношением:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{1+(2\Delta f/f_0)^2 Q^2}},$$

где $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ — добротность контура.

604. В колебательном контуре, состоящем из вариометра и конденсатора, увеличили емкость в два раза и, изменив индуктивность вариометра, настроили снова контур на прежнюю частоту. Как изменяются при этом: логарифмический декремент контура, коэффициент затухания, сила тока при резонансе и напряжение на конденсаторе при резонансе, если в обоих случаях на контур действует последовательно включенная э. д. с. одинаковой амплитуды, а активное сопротивление вариометра остается неизменным?

605. Определить добротность Q контура по следующим данным: резонансная частота $f_{рез}=600$ кГц, емкость $C=$ $=350$ пФ, омическое сопротивление для частот, близких к резонансной, $R=15$ Ом.

606. В колебательный контур включен источник э. д. с. с амплитудой $\mathscr{E}_0=5$ В. Амплитуда напряжения на конденсаторе при резонансе равна $V_0=150$ В. Определить добротность Q контура.

607. Металлическое проволочное кольцо площади S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $H=H_0\cos\omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором $\boldsymbol{H}_0$ и нормалью $\boldsymbol{n}$ к плоскости кольца равен φ (рис. 195). Определить средний момент сил M, действующих на кольцо со стороны магнитного поля. Найти положения равновесия кольца и исследовать их устойчивость. Рассмотреть два предельных случая: 1) $\omega L \gg R$; 2) $\omega L \ll R$. В каком случае при одинаковых L вращающий момент больше?

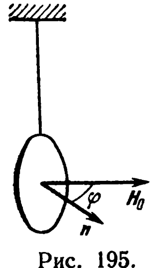


Рис. 195.

608. Один из ранних методов определения отношения заряда к массе e/m для электрона состоял в следующем. Электроны, вырванные из алюминиевого диска A, ускорялись разностью потенциалов V, приложенной между A и щелью S (рис. 196). Пройдя через щель S, электронный пучок попадал в однородное магнит-

ное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. Вся система помещалась в вакууме. Изменяя напряженность магнитного поля, добивались того, чтобы ток на коллектор C, регистрируемый гальванометром G, был максимален. Измерив магнитное поле B в этот момент, можно вычислить e/m. Провести этот расчет (в системе СГСМ), если расстояние между щелью S и коллектором C равно $d=10$ см, угол между прямой, проведенной от S к C, и начальным направлением электронного пучка $\alpha=30°$, $V=1000$ В, $B=10,6$ Гс.

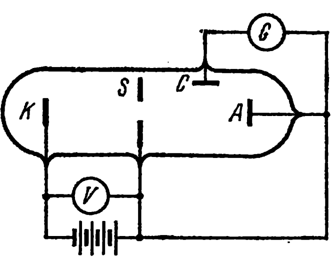
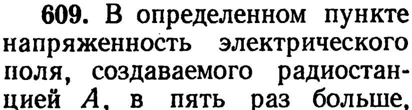


Рис. 196.



609. В определенном пункте напряженность электрического поля, создаваемого радиостанцией A, в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции B. Определить добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию B без помех со стороны станции A, если для этого необходимо, чтобы амплитуда сигналов станции B в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды сигналов станции A. Частота станции A равна 210 кГц, частота станции B равна 200 кГц (см. задачу 603).

610. Волномер состоит из контура, настраивающегося в резонанс с внешней э. д. с. Резонанс устанавливается по максимуму тока в контуре с помощью прибора, точность которого 2%. Данные контура такие же, как в задаче 605. Подсчитать точность определения волномером частоты колебаний в процентах.

611. Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая — к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падения напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Умова — Пойнтинга) $\mathbf{S}$ в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

612. Двухпроводная линия предыдущей задачи присоединена с одного конца к генератору синусоидального тока. Напряжение и сила тока в линии находятся в одной и той же фазе. Показать, что вектор Умова — Пойнтинга $\mathbf{S}$

в пространстве между проводами всегда направлен от генератора к нагрузке.

613. В линии предыдущей задачи ток отстает по фазе от напряжения на 90°. Показать, что вектор Умова — Пойнтинга $\boldsymbol{S}$ через каждую четверть периода меняет свое направление на обратное и, следовательно, поток энергии за период равен нулю (стоячая волна).

614. По прямому проводу, обладающему сопротивлением, идет постоянный ток. 1) Указать для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Умова — Пойнтинга $\boldsymbol{S}$, обусловленной тангенциальной составляющей $\boldsymbol{E}$. 2) Показать, что произведение модуля вектора Умова — Пойнтинга на величину боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

615. Найти плотность тока смещения $j_{см}$ в плоском конденсаторе, пластины которого раздвигаются со скоростью u, оставаясь параллельными друг другу, если: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов V между пластинами остается постоянной. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. 3) Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

616. По длинному идеально проводящему соленоиду длины l_0, отключенному от источника напряжения, течет постоянный ток I_0. Как будет меняться ток I в соленоиде при его растяжениях и сжатиях?

617. Пространство между обкладками длинного цилиндрического конденсатора заполнено однородным диэлектриком со слабой проводимостью. Когда конденсатор заряжен, в диэлектрике от одной обкладки к другой течет электрический ток. Пренебрегая краевыми эффектами, найти напряженность магнитного поля между обкладками.

618. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

619. Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиуса R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и

пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент времени равна I.

620. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V=V_0 \sin \omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле в пространстве между обкладками конденсатора.

621. Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскакивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающий из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и превращения энергии.

622. Плоскому конденсатору емкости C, обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q. Затем конденсатор был отключен от источника электричества. После этого пластины были соединены длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разрядился. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающему внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

623. Плоский воздушный конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков, заряжен электричеством и помещен внутри соленоида, создающего однородное постоянное магнитное поле с индукцией $B=1000$ Гс. Магнитное поле создается батареей, посылающей постоянный ток в обмотку электромагнита. Напряженность электрического поля между пластинами конденсатора равна $E=10000$ В/см. Объем воздушного пространства между пластинами кон-

денсатора равен $V=100$ см³. Конденсатор пробивается электрической искрой вдоль его оси и в результате этого разряжается. Как изменится механический импульс системы после пробоя? Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса.

624. В предыдущей задаче конденсатор не пробивается, а разрывается цепь батареи, питающей соленоид. Как в результате изменится механический импульс системы?

§ 7. Электрический ток в жидкостях

625. Над северным полюсом сильного электромагнита помещена цилиндрическая электролитическая ванна, содержащая раствор медного купороса между медными электродами в форме цилиндров (рис. 197), присоединенных к полюсам батареи. Как будет двигаться электролит в этих условиях?

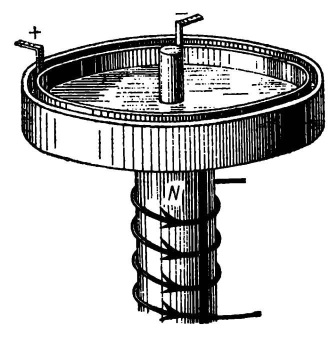


Рис. 197.

626. Ток силы 1 А проходит через электролит. Предполагая для простоты, что подвижность ионов одинакова, можно считать, что ежесекундно положительные ионы переносят в одну сторону положительный заряд 0,5 Кл, а отрицательные ионы — отрицательный заряд 0,5 Кл в другую сторону. Чему в таком случае соответствует количество отложившегося вещества на электродах: 0,5 Кл на аноде и 0,5 Кл на катоде или 1 Кл на аноде и 1 Кл на катоде?

627. Сколько нужно израсходовать ампер-часов, чтобы отложить на электроде гальванического элемента грамм-эквивалент какого-нибудь вещества?

628. На основании законов электролиза определить отношение заряда к массе водородного иона e/m_{H}. Число Фарадея $F=2{,}8926$ СГСЭ.

629. Пользуясь законами электролиза и числом Авогадро, определить массу водородного иона m_{H} и заряд электрона e. Число Авогадро равно $\approx 6{,}02\cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

630. Батарея гальванических элементов (э. д. с. $\mathscr{E}=0{,}9$ В, внутреннее сопротивление $r=0{,}6$ Ом) состоит из 30 элементов, соединенных в три одинаковые параллель-

ные группы. Какое количество меди Q выделится на катоде за 5 мин работы батареи, включенной на нагрузку, сопротивление которой равно 205 Ом? Относительная атомная масса меди равна 63,57.

631. При прохождении тока через вольтаметр с подкисленной водой в течение 3 мин образовалось 150 см^3 гремучего газа, и уровень воды в вольтамметре понизился на 12 см. Атмосферное давление во время опыта было равно 750 мм рт. ст., а плотность подкисленной воды была 1,13 г/см^3. Найти силу тока I.

632. Батарею аккумуляторов замыкают на банку с подкисленной водой. При разрядке батареи получается такое количество гремучего газа, что при его сгорании получают 35% энергии, затраченной на зарядку аккумуляторной батареи. Если вместо одной банки с подкисленной водой включить последовательно несколько банок, то, конечно, потребуется больше времени, чтобы протекло то же количество электричества, как и в случае одной банки. Но количество отложившегося вещества зависит, по закону Фарадея, только от количества электричества, протекшего через электролит. Поэтому хоть и через большой промежуток времени, но в каждой банке выделится такое же количество гремучего газа, как и в случае включения только одной банки с подкисленной водой. Тогда при сгорании всего количества гремучего газа, выделившегося во всех банках, энергии получится гораздо больше, чем было затрачено на зарядку аккумуляторной батареи. Иначе говоря, будет нарушен закон сохранения энергии. Разъяснить недоразумение.

633. Найти э. д. с. $\mathcal{E}$ элемента Даниэля, если известно, что при соединении одного грамм-эквивалента цинка с серной кислотой освобождается 124 000 кал тепла, а для выделения одного грамм-эквивалента меди из $CuSO_4$ требуется приблизительно 99 700 кал.

634. Подвижности ионов электролита равны u (для катиона) и v (для аниона). Какие количества заряда перенесены ионами каждого типа через электролит, если всего прошло Q единиц количества электричества?

635. Электролитическая ванна, содержащая раствор $CuSO_4$, соединена последовательно с серебряным вольтаметром, в котором при прохождении тока выделился 1 г серебра. За то же время раствор $CuSO_4$, окружающий катод, потерял в результате электролиза 0,21 г меди. Во сколько раз анион SO_4 движется быстрее катиона Cu?

636. При электролизе раствора серной кислоты катион H движется в 5,4 раза быстрее аниона SO_4. Найти числа переноса.

637. В электролитической ванне находится четырехпроцентный раствор азотно-серебряной соли ($AgNO_3$) при 18,4 °C. При прохождении тока через электролит на катоде выделилось 0,3208 г серебра, а у катода, как выяснилось путем измерения концентрации серебра в растворе после электролиза, из раствора исчезло только 0,1691 г серебра. Чему равно число переноса k серебра?

638. Через электролитическую ванну, в которой находится слабый раствор хлористого калия (KCl), в течение 10 мин пропускался ток силой 0,43 A, после чего из измерений концентраций оказалось, что из раствора у анода ушло 0,09964 г KCl. Найти число переноса k калия. Относительная молекулярная масса KCl равна 74,6.

639. Для концентрированного раствора CdI_2 в воде были получены следующие числа переноса: для аниона $n=1{,}258$, а для катиона $1-n=-0{,}258$, т. е. из катодной части электролита исчезло больше кадмия, чем выделилось на катоде. Чем это можно объяснить?

640. Концентрации катионов у электродов равны c_1 и c_2. Какая работа A совершается при изменении концентрации катионов вследствие перехода их от анода к катоду при постоянной температуре T электролита, если подвижности аниона и катиона u и v и через электролит прошло Q единиц количества электричества?

641. Разность потенциалов на полюсах концентрационного элемента выражается формулой Гельмгольца

$$V_1-V_2=\frac{v-u}{v+u}\frac{RT}{nF}\ln\frac{c_1}{c_2},$$

где R — газовая постоянная, v, u — подвижности ионов, n — валентность, F — число Фарадея. Получить эту формулу, исходя из закона сохранения энергии.

642. Найти соотношение между коэффициентом диффузии k и подвижностью u соответствующего иона.

643. Известно, что при зарядке кислотного аккумулятора плотность электролита увеличивается. (Обычно зарядку прекращают, когда плотность электролита достигает 1,3 г/см³ вместо первоначальной 1,1 г/см³.) В чем причина возрастания плотности электролита при заряде?

644. Зная число Фарадея $F=96\,500$ Кл/г-экв, вычислить электрохимический эквивалент K серебра, т. е. количество серебра, выделяемое при электролизе одним кулоном электричества. Относительная атомная масса серебра $A=$ $=108$.

645. Зная электрохимический эквивалент серебра, вычислить электрохимический эквивалент меди. Относительная атомная масса меди $A=63,5$.

646. Подвижности ионов Na^+ и Cl^- в водном растворе равны соответственно $b^+=4,5\cdot10^{-2}$ см²/(с·В) и $b^-=6,77\cdot$ $\cdot10^{-2}$ см²/(с·В). Пользуясь этими данными, вычислить эквивалентную проводимость Λ_∞ бесконечно разбавленного раствора поваренной соли NaCl при 18 °С.

647. Удельное сопротивление десятипроцентного раствора поваренной соли NaCl ($m=0,1$ г соли на 1 см³ раствора) при комнатной температуре равно $\rho=8,35$ Ом·см. Вычислить эквивалентную концентрацию η, эквивалентную проводимость Λ и степень диссоциации α этого раствора. Относительные атомные массы натрия и хлора равны соответственно $A_{Na}=23$, $A_{Cl}=35,5$.

648. Самая чистая вода при температуре 18 °С имеет удельную проводимость $\lambda=3,8\cdot10^{-2}$ См/см. Считая, что проводимость воды связана с диссоциацией молекулы H_2O на ионы H^+ и $(OH)^-$, найти степень диссоциации воды при этой температуре. Подвижности ионов H^+ и $(OH)^-$ равны соответственно $b^+=3,26\cdot10^{-3}$ см²/(с·В) и $b^-=1,80\cdot10^{-3}$ см²/(с·В).

§ 8. Термоэлектричество

649. Термопара висмут — железо с постоянной $C=$ $=92\cdot10^{-6}$ В/°С и сопротивлением $r=5$ Ом присоединена к гальванометру с внутренним сопротивлением $R=110$ Ом. Какой ток покажет гальванометр, если один спай термопары погрузить в пар кипящей под нормальным давлением воды, а другой — в тающий лед?

650. Какова постоянная C термопары висмут — теллур, если при подключении ее к гальванометру с внутренним сопротивлением $R=100$ Ом и чувствительностью на одно деление 10^{-5} А минимальная разность температур, которую можно измерить, $\Delta T=2\cdot10^{-3}$ °С? Сопротивлением термопары пренебречь.

651. Для определения температуры печи в нее вставлена термопара никель — нихром с постоянной

$C=0{,}5\cdot 10^{-6}$ В/°C, присоединенная к гальванометру с внутренним сопротивлением $R=2000$ Ом и с чувствительностью на одно деление 10^{-5} А. При температуре второго спая $T_2=+15$ °C гальванометр дает отклонение $b=25$ делений. Чему равна температура T_1 печи?

652. 1) Два различных металла находятся в соприкосновении. Давление электронного газа в первом металле P_1 и работа выхода электрона из этого металла A_1; давление электронного газа во втором металле P_2 и работа выхода электрона из него A_2. Найти контактную разность потенциалов, если температура обоих металлов T. 2) Из указанных металлов составлена термопара с двумя спаями, находящимися при температурах T_1 и T_2. Найти термоэлектродвижущую силу.

Указание. Давление P электронного газа в металле связано с концентрацией n электронов и температурой T металла соотношением $P=nkT$, где k — постоянная Больцмана.

§ 9. Электроника

653. Какой скоростью v обладает электрон, прошедший разность потенциалов $V=100$ В?

654. Найти среднюю скорость v упорядоченного движения электронов вдоль медного проводника, по которому течет постоянный ток плотностью 1 А/см², если считать, что на каждый атом меди в металле приходится один электрон проводимости.

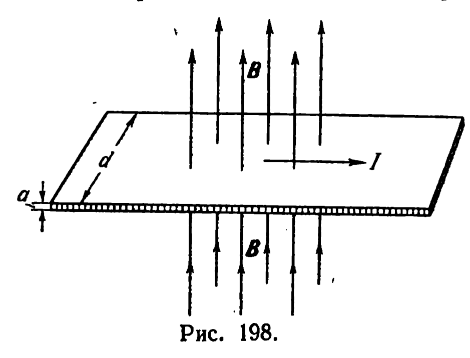


Рис. 198.

655. В однородное магнитное поле, индукция которого $\boldsymbol{B}$, помещена тонкая металлическая лента шириной d (рис. 198) и толщиной a так, что плоскость ленты перпендикулярна к индукции $\boldsymbol{B}$. По ленте пропускают ток силой I. Найти разность потенциалов V, возникающую между краями ленты (т. е. на расстоянии d), если концентрация свободных электронов в металле ленты n (частный случай явления Холла).

656. Для определения работы выхода электрона из металла можно поступить так. Испытуемый металл в виде нити натягивают по оси цилиндра и все устройство помещают в вакуум. Когда по нити идет ток силой $I_н$, нить калится до температуры T и при этом имеет сопротивление R. Затем накладывают на цилиндр достаточно большой положительный потенциал, чтобы получить ток насыщения I. При этом температура нити падает. Для того чтобы восстановить прежнюю температуру нити, увеличивают силу тока накала на $\Delta I_н$. Вычислить работу выхода $\varphi_{вых}$ в вольтах, полагая известными $I_н$, T, R, $\Delta I_н$. Влиянием температуры цилиндра на температуру T нити накала можно пренебречь.

657. Вольфрамовая нить кенотрона накаливается током $I=10$ А до температуры T_0. Приложенное к ней напряжение накала $V_н=8$ В, а анодное напряжение равно нулю. В момент включения анодного напряжения температура нити изменяется, что можно заметить по изменению ее свечения. Какое требуется напряжение накала, чтобы в установившемся режиме при анодном напряжении $V_а=5000$ В температура нити снова стала равной T_0? При этом известно, что мощность, рассеиваемая на аноде при температуре нити T_0 и напряжении $V_а=5000$ В, составляет $N=1{,}2$ кВт. Работа выхода электрона $\varphi_{вых}$ для вольфрама равна 4,5 В.

658. На рис. 199 изображена электронная лампа непосредственного накала со всеми поданными на нее напряжениями. С какой скоростью (выраженной в вольтах) электроны будут достигать анода лампы?

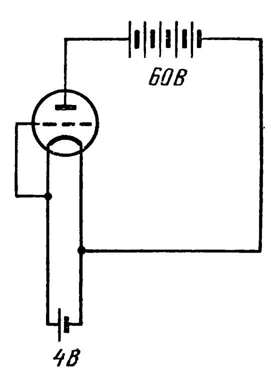


Рис. 199.

659. Будет ли скорость электронов, достигающих анода лампы, иной, если сетка лампы будет соединена не с нитью накала, как показано на рис. 199, а с анодом лампы?

660. С каким ускорением движется электрон, находящийся в полости внутри однородного металла, покоящегося в поле тяжести? Полость имеет форму узкого, очень длинного цилиндра, направленного вертикально, а электрон помещается на оси этого цилиндра. Как изменится ускорение, если электрон заменить позитроном? Возникает

ли в полости (при отсутствии в ней электрона или позитрона) электрическое поле? Если да, то найти его величину. Искажение решетки под действием силы тяжести не учитывать. Возникнут ли в металле объемные заряды?

661. Внутри однородного металла, движущегося с ускорением $a=10$ м/с², в отсутствие поля тяготения имеется узкая, очень длинная цилиндрическая полость, направление оси которой совпадает с направлением ускорения $\boldsymbol{a}$. С каким ускорением будет двигаться в такой полости электрон, помещенный на ее оси? Как изменится ускорение, если электрон заменить позитроном? Возникает ли в полости (при отсутствии в ней электрона или позитрона) электрическое поле? Если да, то найти его величину. Искажение решетки, вызванное ускоренным движением металла, не учитывать. Возникнут ли в металле объемные заряды?

662. Электрон, вышедший из накаленного катода K с достаточно малой скоростью, приобретает скорость в поле

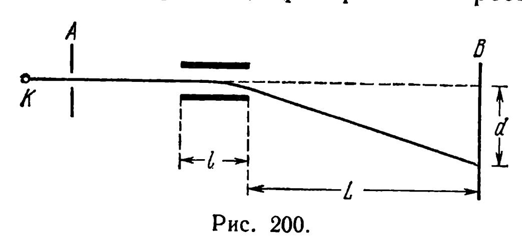


Рис. 200.

анода A, находящегося под потенциалом V, и, пройдя между пластинами конденсатора длины l, попадает на флуоресцирующий экран B (рис. 200), помещенный на расстоянии L от конденсатора. Когда в конденсаторе появляется электрическое поле, пятно на экране смещается на расстояние d. Чему равна напряженность поля E в конденсаторе?

663. Показать, что, какой бы скоростью $\boldsymbol{v}$ ни обладал электрон, влетающий в однородное магнитное поле напряженности $\boldsymbol{H}$, и какой бы угол $\alpha\neq0$ ни образовывало направление $\boldsymbol{v}$ с направлением $\boldsymbol{H}$, электрон опишет виток винтовой линии за одно и то же время T.

664. Электрон, обладающий скоростью $\boldsymbol{v}$, попадает в однородное магнитное поле, напряженность которого $\boldsymbol{H}$ направлена перпендикулярно к $\boldsymbol{v}$. Окружность какого радиуса будет описывать электрон?

665. Электрон движется в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{H}$. Чему равна работа силы, действующей на электрон?

666. Электрон влетает в постоянное однородное магнитное поле напряженности $\boldsymbol{H}$ (рис. 201) и в этот момент находится в точке A, обладая скоростью $\boldsymbol{v}$, образующей с направлением поля угол α. Описав один виток винтовой линии, он окажется в точке B. Чему равно AB?

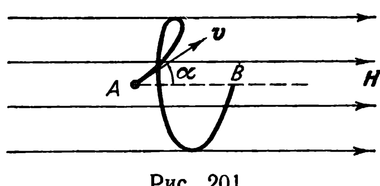


Рис. 201.

667. Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом e и импульсом p, движущейся в постоянном магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводящий шнур с током I, находящийся под постоянным механическим натяжением T, занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. (Предполагается, что вне магнитного поля участки шнура прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории.) Обосновать этот метод. Найти связь между I, e, p, T. Величина индукции магнитного поля B может меняться в пространстве, но ее направление должно оставаться неизменным. Частица движется перпендикулярно к магнитному полю.

668. Труба, свернутая в кольцо, заполнена жидкостью и находится в поле тяжести Земли. При повороте кольца вокруг его диаметра жидкость приходит в движение вдоль оси трубы. Это движение аналогично индукционному току, возникающему при движении проводника в магнитном поле. Роль силы Лоренца играет сила инерции Кориолиса, вызванная вращением Земли вокруг своей оси. Опыт может служить для доказательства вращения Земли и измерения угловой скорости этого вращения. На основе аналогии описанного явления с электромагнитной индукцией дать количественную теорию его, предполагая, что жидкость несжимаемая и не обладает вязкостью, а площадь поперечного сечения трубы всюду одинакова.

669. Шарик массы $m=1$ г с зарядом $q=1$ СГСЭ помещен внутри соленоида на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может скользить без трения. Ось соленоида вертикальна. Сначала тока в обмотке соленоида не было.

Затем был включен ток, и в соленоиде установилось постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B=100$ Гс. Во время нарастания магнитного поля возникает электрическое поле, приводящее шарик в движение. Нарастание тока происходило настолько быстро, что за время установления поля шарик не успел сместиться на заметное расстояние. Определить радиус r круговой траектории, по которой будет двигаться шарик после установления магнитного поля, а также период обращения T его по этой траектории, если в начальный момент шарик находился на расстоянии R от оси соленоида. Проанализировав численные результаты, ответьте на вопрос, можно ли практически наблюдать эффект с макроскопическими шариками. В чем трудности постановки опыта с заряженными макрочастицами?

670. Каким магнитным моментом $\mathfrak{M}$ обладает частица с зарядом e и массой m, движущаяся с произвольной скоростью $v<c$ в однородном и постоянном магнитном поле H? Скорость $\boldsymbol{v}$ перпендикулярна полю $\boldsymbol{H}$.

671. Нить накала магнетрона имеет диаметр d, а цилиндр анода D. Между нитью накала и анодом приложена разность потенциалов V. На колбу магнетрона навита проволока, которая образует соленоид так, что его ось совпадает с нитью накала. Число витков на единицу длины соленоида n. Какой наименьшей силы ток нужно пустить по соленоиду, чтобы ни один электрон, вышедший из нити без начальной скорости, не долетел до анода?

672. Найти отношение силы кулоновского отталкивания к силе амперова притяжения двух параллельных пучков, состоящих из электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V=10$ кВ.

673. Серпуховской ускоритель протонов ускоряет эти частицы до энергии $\mathcal{E}=76$ ГэВ$=7{,}6\cdot10^{10}$ эВ. Если отвлечься от наличия ускоряющих промежутков, то можно считать, что ускоренные протоны движутся по окружности радиуса $R=236$ м и удерживаются на ней магнитным полем, перпендикулярным к плоскости орбиты. Найти необходимое для этого магнитное поле.

674. Легкий шарик массы $m=0{,}5$ г и радиуса $r=1$ см подвешен на длинной нити и вращается по горизонтальной окружности, радиус которой очень мал по сравнению с длиной нити (конический маятник). Найти изменение угловой скорости вращения шарика $\Delta\omega=\omega-\omega_0$ после того, как он был заряжен до потенциала $V=3000$ В и по-

мещен в вертикальное магнитное поле $H=3000$ Э. В каком случае угловая скорость увеличится и в каком уменьшится?

Примечание. Окончательную формулу для изменения угловой скорости упростить, использовав соотношение $\frac{eH}{mc} \ll \sqrt{\frac{g}{l}}$, где e — заряд шарика, l — длина нити, g — ускорение свободного падения.

675. Масс-селектор, т. е. прибор, предназначенный для разделения атомных частиц разных масс, состоит из цилиндрического конденсатора с внутренним радиусом $r_1=2,4$ см и внешним $r_2=3$ см (рис. 202). Ионные лучи попадают в селектор через узкую щель S, расположенную посередине между обкладками. Параллельно оси конденсатора (т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа) приложено однородное магнитное поле с индукцией $B=2000$ Гс. Какую по величине и знаку разность потенциалов надо приложить к пластинам конденсатора, чтобы однократно заряженный положительный ион Li^7 прошел по средней линии конденсатора, т. е. по окружности радиуса $r=2,7$ см? Найти напряженность электрического поля на этой окружности. Энергия иона $\mathscr{E}=1000$ эВ. Масса атома водорода $1,67 \cdot 10^{-24}$ г. Насколько надо изменить эту разность потенциалов, чтобы по той же линии через селектор могли пройти ионы Li^6?

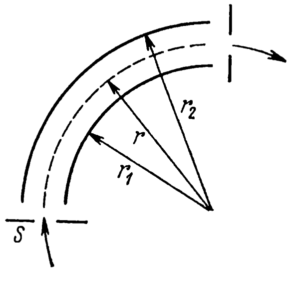


Рис. 202.

676. Между двумя параллельными пластинами, из которых одна является катодом, а другая анодом, создано перпендикулярное к пластинам однородное электрическое поле напряженности E и однородное магнитное поле, параллельное пластинам, напряженности H. 1) Найти траекторию движения электрона, покидающего поверхность катода без начальной скорости. 2) При каком условии электрон вернется обратно на катод и в каком месте тогда он упадет?

677. Как должна быть направлена начальная скорость электрона в предыдущей задаче и какова должна быть ее величина, чтобы электрон описывал окружность? Чему равен радиус r этой окружности? Чему равен период T обращения электрона по окружности?

678. Две щели S_1 и S_2 шириной $d=0,1$ см каждая (рис. 203), установленные в эвакуированном сосуде, выделяют плоский пучок электронов с энергией $\mathscr{E}=400$ эВ. На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пучка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины

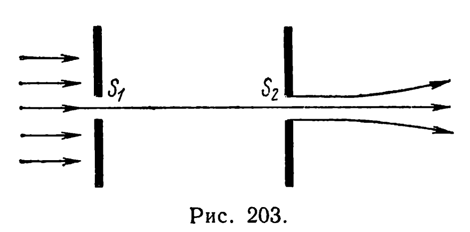


Рис. 203.

щели (за щелью S_2), равен $i=10^{-4}$ А/см? При расчетах щели считать бесконечно длинными.

679. В установке для разделения изотопов U^{235} и U^{238} пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $\mathscr{E}=5$ кэВ попадает от источника через щель S (рис. 203а) в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних должна быть такова, чтобы расстояние между пучками U^{235} и U^{238} на выходе было не меньше $\delta=5$ мм. Каково должно быть магнитное поле B, удовлетворяющее этому условию? Найти также время t, необходимое для полного разделения $M=1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $I=5$ мА. Массы протона и нейтрона считать одинаковыми и равными $1,67\cdot10^{-24}$ г.

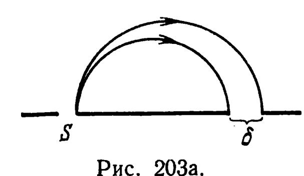


Рис. 203а.

680. Электрон, обладающий скоростью $\mathbf{v}$, движется в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\mathbf{H}$, перпендикулярном к его скорости. Найти величину магнитного момента $\mathfrak{M}$ эквивалентного тока.

681. Электрон, обладающий скоростью v, движется в однородном и постоянном магнитном поле, перпендикулярном к его скорости. Найти величину момента количества движения M электрона.

682. Если полагать, что масса медленно движущегося электрона, рассматриваемого как шар радиуса r с зарядом e, распределенным по поверхности, то она будет равна $\frac{2}{3}\frac{e^2}{rc^2}$. Экспериментально найдено, что для электрона $e/m = 1{,}77 \cdot 10^7$ СГСМ. Определить радиус r электрона.

683. Электрон, обладающий скоростью v, попадает в однородные и постоянные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля, напряженности которых равны соответственно E и H. Скорость $\boldsymbol{v}$ перпендикулярна к обоим полям. Найти траекторию движения электрона.

684. При каком условии электрон предыдущей задачи будет двигаться прямолинейно и равномерно?

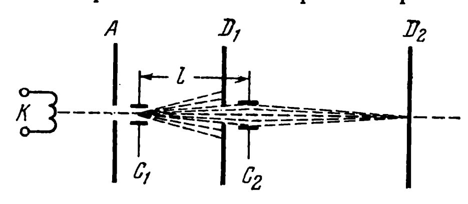


Рис. 204.

685. В вакуумной трубке электроны, эмиттированные катодом K (рис. 204), ускоряются электрическим полем анода A, находящегося при потенциале V относительно катода. Пройдя через отверстие в аноде, электроны пролетают через конденсатор C_1, через отверстие в диафрагме D_1, через второй конденсатор C_2 и попадают на экран D_2. К конденсаторам C_1 и C_2 приложено одно и то же переменное напряжение угловой частоты ω. Эту частоту подбирают так, чтобы пятно, создаваемое на экране электронным пучком, не размывалось. Определить e/m для электрона, если расстояние между конденсаторами C_1 и C_2 равно l.

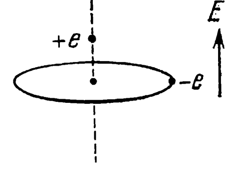


Рис. 205.

686. Модель атома водорода можно представить в виде ядра с зарядом $+e$, вокруг которого по круговой орбите радиуса a движется равномерно электрон $-e$. Если такой атом поместить в электрическое поле напряженности E, то орбита электрона сместится (рис. 205) и атом приобретет электрический дипольный момент. Найти величину среднего электрического момента p, пренебрегая изменением расстояния между зарядами.

687. Определить частоту колебаний электрического поля в циклотроне, предназначенном для разгона дейтонов, если индукция магнитного поля в зазоре магнитов циклотрона равна 14 000 Гс.

688. Найти закон, по которому происходит увеличение радиуса кругов, описываемых дейтонами в циклотроне, если известно, что дейтоны проходят зазор между дуантами циклотрона при максимальном напряжении на них.

689. В газоразрядной трубке между плоскими электродами ($S=10$ см²), отстоящими друг от друга на расстоянии $d=10$ см, ток насыщения $I_{\text{нас}}=10^{-6}$ А. Ионы в трубке возникают под действием постороннего ионизатора (несамостоятельный разряд). Какое количество q элементарных зарядов того и другого знака создается ежесекундно в 1 см³?

690. Между двумя пластинами площадью S каждая, находящимися на расстоянии d и образующими плоский конденсатор в вакууме, приложена разность потенциалов V. При освещении катода ультрафиолетовыми лучами между пластинами идет ток силы I, который достигает своего значения насыщения $I_{\text{н}}$ при $V=V_0$. Найти подвижность электронов u.

691. Некоторый ионизатор (например, рентгеновы лучи) создает в единице объема газа в единицу времени q пар однозарядных ионов разных знаков. Коэффициент рекомбинации ионов равен α. Определить концентрацию n пар ионов в момент времени t, если ионизатор был включен в момент $t=0$, а концентрация ионов в этот момент была равна нулю.

692. В момент времени $t=0$ начинает действовать ионизатор, создающий в единице объема газа в единицу времени q пар положительных и отрицательных ионов. Предполагая, что $q=\text{const}$, найти выражение для концентрации пар ионов во все последующие моменты времени.

693. В начальный момент в газе была создана ионизация с начальной концентрацией n_0 пар ионов в единице объема. Как будет меняться во времени t концентрация n тех же пар, если коэффициент рекомбинации равен α.

694. Между плоскими электродами площадью $S=100$ см² каждый, находящимися на расстоянии $l=5$ см друг от друга, создана ионизация воздуха рентгеновыми лучами и наблюдается ток насыщения $I_{\text{нас}}=10^{-7}$ А. Определить число пар ионов q, создаваемых ионизатором в 1 см³ в течение одной секунды, а также концентрацию этих пар n в устано-

вившемся состоянии. Коэффициент рекомбинации для воздуха $\alpha=1{,}67\cdot10^{-6}$ см³/с.

695. В атмосферном воздухе у поверхности Земли из-за радиоактивности почвы и ионизации космическими лучами в среднем образуется $q=5$ ионов в 1 см³ в одну секунду. Определить ток насыщения, текущий благодаря этой естественной ионизации в плоском воздушном конденсаторе с площадью каждой обкладки $S=100$ см² и расстоянием между обкладками $l=5$ см.

696. Определить время разрядки конденсатора в условиях предыдущей задачи, если первоначально он был заряжен до разности потенциалов $V=300$ В.

697. Через какое время τ после выключения ионизатора число ионов в камере, наполненной воздухом, уменьшится: 1) в 2 раза; 2) в 4 раза? Начальная концентрация пар ионов $n_0=10^7$ см⁻³. Коэффициент рекомбинации для воздуха $\alpha=1{,}67\cdot10^{-6}$ см³/с.

698. Определить эффективное сечение σ рекомбинации положительного молекулярного иона воздуха с отрицательным при комнатной температуре, если коэффициент рекомбинации для воздуха $\alpha=1{,}67\cdot10^{-6}$ см³/с.

699. Решить ту же задачу для рекомбинации положительного иона с электроном.

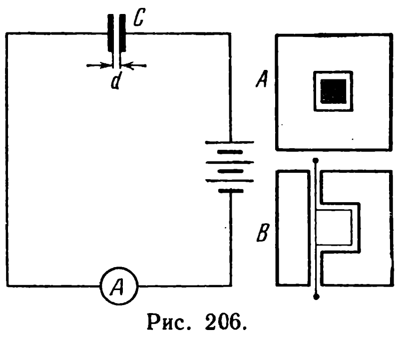


Рис. 206.

700. В стеклянном сосуде, содержащем газ, помещен плоский конденсатор C, пластины которого A и B находятся на расстоянии d друг от друга. В центре пластины A (рис. 206) расположена пластинка из платины, подогреваемая током и вызывающая образование ионов газа. В середине другой пластины B имеется вырез, закрытый алюминиевой пластинкой, одно ребро которой закреплено на натянутой тонкой вертикальной проволоке. К пластинам конденсатора приложена разность потенциалов, создающая между пластинами ток силой I. Вследствие наличия сопротивления среды ионы газа движутся равномерно. Алюминиевая пластинка, укрепленная на проволоке, отклоняется на малый угол θ. Коэффициент упругости проволоки при кручении c, ширина пластинки l. Найти подвижность u ионов.

701. В трубку с газом введены два плоских, параллельных друг другу электрода, к которым приложена постоянная разность потенциалов. Катод освещают мощным источником света, вследствие чего ежесекундно на поверхности катода выделяется n_0 электронов. Электроны, двигаясь в электрическом поле, ионизуют молекулы газа, причем каждый электрон на пути 1 см создает α новых электронов и ионов. Пренебрегая ионизацией молекул газа образующимися ионами, вычислить плотность тока j. Расстояние между электродами d.

702. Газ между плоскими и расположенными параллельно на расстоянии d друг от друга электродами ионизуется рентгеновыми лучами, причем ежесекундно в единице объема создается n_0 электронов. Электроны, двигаясь в электрическом поле между электродами, ионизуют молекулы газа, причем коэффициент ионизации равен α. Чему равна плотность тока j? Ионизацией ионами пренебречь.

703. Потенциал ионизации атома ртути равен $\varphi=10,4$ В. Какой наименьшей скоростью v должен обладать электрон, чтобы ионизовать атом ртути при ударе?

704. В газоразрядной трубке наблюдается тлеющий разряд между плоскими электродами. Как будет изменяться картина разряда, если сближать анод с катодом?

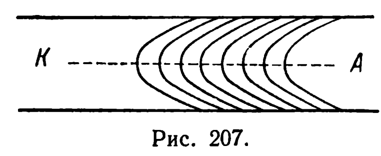


Рис. 207.

705. Чем объясняется форма эквипотенциальных поверхностей в положительном столбе газоразрядной трубки (рис. 207)?

706. Почему катодные лучи представляют собой прямолинейный пучок независимо от того, лежит ли анод на пути пучка или смещен в сторону?

707. Два однозарядных иона противоположных знаков вращаются вокруг их общего центра масс. Размеры ионов очень малы по сравнению с расстоянием между ними. Эта пара ионов находится в термическом равновесии с одноатомным газом, температура которого $T=3000$ К. Чему равен средний электрический момент этой пары ионов?

§ 10. Электромагнитные волны

708. Найти закон распределения амплитуд токов I_x и напряжений V_x для собственных колебаний в двухпроводной линии длиной l, концы которой разомкнуты. Найти

частоты ν этих колебаний. Потерями в линии можно пренебречь.

709. Найти закон распределения амплитуд токов I_x и напряжений V_x для собственных колебаний в двухпроводной линии длиной l, концы которой замкнуты накоротко. Найти частоты ν этих колебаний. Потерями в линии можно пренебречь.

710. Найти закон распределения амплитуд токов I_x и напряжений V_x для собственных колебаний в двухпроводной линии длиной l, один конец которой разомкнут, а другой замкнут накоротко. Найти частоты ν этих колебаний. Потерями в линии можно пренебречь.

711. Найти волновое сопротивление ρ двухпроводной линии без потерь, провода которой имеют диаметр $2r=4$ мм и расположены на расстоянии $d=10$ см друг от друга.

Указание. Волновым сопротивлением двухпроводной линии называется отношение амплитуды напряжения между проводами к амплитуде тока в одном из них, когда волна в линии является бегущей.

712. Найти волновое сопротивление ρ воздушной концентрической линии без потерь, внешний цилиндр которой имеет внутренний диаметр $2R=40$ мм, а внутренняя жила — диаметр $2r=8$ мм.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

713. Найти скорость v распространения электромагнитных волн в концентрическом кабеле, в котором пространство между внешним и внутренним проводами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=4,5$. Потерями в кабеле можно пренебречь.

714. Найти периоды собственных колебаний T_k двухпроводной линии длиной l_1, разомкнутой на обоих концах и погруженной в воду. Потерями в линии пренебречь.

715. Найти наименьшую частоту ν_1, при которой наступит резонанс в концентрическом кабеле длиной $l=12$ км, описанном в задаче 713, если к одному концу кабеля присоединен источник переменной э. д. с., внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, а другой конец кабеля разомкнут.

716. Найти волновое сопротивление ρ концентрического кабеля, внешняя жила которого имеет внутренний диаметр $2R=12$ мм, а внутренняя жила — диаметр $2r=2$ мм. Все пространство между внешней и внутренней жилами заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2,4$. Потерями в кабеле можно пренебречь.

717. Найти входное сопротивление двухпроводной линии без потерь на частоте $\nu=5\cdot10^7$ Гц, если линия образована проводами с диаметром $2R=2$ мм, расположенными на расстоянии $d=12$ мм друг от друга, и конец линии разомкнут, а длина линии равна: 1) $l_1=2$ м; 2) $l_2=3$ м; 3) $l_3=3{,}5$ м; 4) $l_4=7{,}5$ м. Определить, каков характер входного сопротивления — емкостный или индуктивный.

Указание. Входным сопротивлением линии для данной частоты называется отношение между амплитудами напряжения и силы тока, устанавливающимися на входе линии, питаемой переменной э. д. с. данной частоты.

718. На провода линии, описанной в предыдущей задаче, положен металлический мостик, замыкающий линию накоротко. Мостик может передвигаться вдоль линии. Найти входное сопротивление линии $Z_{вх}$ как функцию расстояния x от начала линии до мостика. Определить, как изменяется характер сопротивления при изменении положения мостика.

719. Отрезок двухпроводной линии без потерь длиной $l=5$ м замкнут на конце на конденсатор емкостью $C=20$ пФ. Расстояние между проводами линии $d=4$ см и диаметр проводов $2r=4$ мм. Найти входное сопротивление линии $Z_{вх}$ на частоте $\nu=75\cdot10^6$ Гц.

Указание. В случае, когда к концу линии присоединена реактивная нагрузка (емкость или индуктивность), для расчетов можно заменить эту нагрузку отрезком линии с теми же параметрами, как и у линии, и длиной, выбранной таким образом, чтобы входное сопротивление этого отрезка линии было равно реактивному сопротивлению нагрузки и имело тот же характер (соответственно емкостный или индуктивный), т. е. задачу можно свести к эквивалентной линии без нагрузки на конце, но имеющей другую длину.

720. Отрезок концентрического кабеля длиной 20 м с внутренним диаметром внешней жилы 8 мм и диаметром внутренней жилы 2 мм, заполненный диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3{,}2$, замкнут на катушку с индуктивностью $L=10$ мкГ. Найти входное сопротивление этого отрезка кабеля на частоте $\nu=15\cdot10^6$ Гц.

Указание. См. указание к предыдущей задаче.

721. Двухпроводная линия длиной $l=5$ м образована проводами диаметром $2r=3$ мм, расположенными на расстоянии $d=6$ см друг от друга. Найти входное сопротивление этой линии для частоты $\nu=75\cdot10^6$ Гц, если оба про-

вода линии вместе для этой частоты имеют погонное омическое сопротивление $R_1=0,2$ Ом/м и второй конец линии: 1) замкнут накоротко; 2) разомкнут.

Указание. В случае, когда на длине линии укладывается целое число четвертей волны, линия ведет себя подобно последовательному или параллельному резонансному контуру (в зависимости от того, пучность или узел тока лежит у входа линии). Этой аналогией и можно воспользоваться для определения входного сопротивления линии. При этом нужно учитывать, что сила тока в разных точках линии различна. Поскольку омическое сопротивление линии мало́, распределение тока в ней можно считать синусоидальным.

722. Двухпроводная линия длиной $l=18$ м замкнута на активное сопротивление $r=80$ Ом. Волновое сопротивление линии $\rho=400$ Ом. Потерями в линии можно пренебречь. Найти входное сопротивление этой линии для волн: 1) $\lambda=8$ м и 2) $\lambda=9$ м.

Указание. Воспользоваться указанием к предыдущей задаче о том, что при целом числе четвертей волны, укладывающихся в линии, она ведет себя как последовательный или параллельный резонансный контур.

723. Найти входное сопротивление линии, описанной в предыдущей задаче, если она включена на активное сопротивление $r=400$ Ом.

724. Пользуясь теоремой Умова — Пойнтинга. подсчитать электромагнитную энергию, которую несет с собой бегущая электромагнитная волна, распространяющаяся вдоль воздушного концентрического кабеля без потерь. Показать, что энергия, протекающая за единицу времени через сечение кабеля, равна мощности, которую отдает источник, питающий кабель.

Указание. Электрическое и магнитное поля между внешней и внутренней жилами кабеля нужно выразить через напряжение и силу тока в нем.

725. Найти распределение амплитуд токов I_x, частоты ν_k и длины волн λ_k собственных колебаний тонкого провода длиной $l=6$ м, если этот провод: 1) расположен далеко от земли; 2) расположен вертикально над землей и нижний конец заземлен.

Указание. Для тонкого провода можно считать, что собственные колебания дают такое же распределение токов, как и в двухпроводной линии при тех же условиях.

726. Для получения очень коротких электромагнитных волн П. Н. Лебедев пользовался вибратором (рис. 208), состоящим из двух тонких платиновых проволочек $П_1$ и $П_2$ длиной 1,3 мм каждая, впаянных в стеклянные трубки T_1 и T_2 и разделенных малым искровым промежутком в 0,4 мм. Заряжался вибратор от индукционной катушки через большие искровые промежутки между соединительными проводами и проводами вибратора. Таким образом П. Н. Лебедев в 1895 г. получил наиболее короткие электромагнитные волны. Какую длину волны λ давал вибратор П. Н. Лебедева?

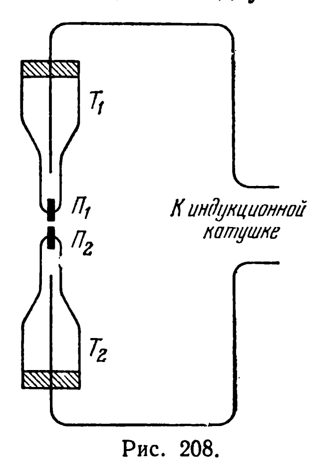


Рис. 208.

727. Напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне, создаваемой малым по сравнению с длиной волны элементом тока, меняющегося по синусоидальному закону («вибратор Герца»), на расстояниях от вибратора, намного превышающих длину волны, даются выражениями

$$E = 30\frac{\omega l I}{cr}\sin\varphi\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

$$H = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega l I}{cr}\sin\varphi\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

где E — напряженность электрического поля в В/м, H — напряженность магнитного поля в А/м, ω — угловая частота тока в вибраторе, I — амплитуда тока в амперах, l — длина вибратора, r — расстояние от вибратора до рассматриваемой точки в метрах, φ — угол между осью вибратора и направлением на рассматриваемую точку. Направления $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в каждой точке перпендикулярны друг к другу и к радиусу-вектору $\boldsymbol{r}$. Найти полную мощность N, излучаемую вибратором Герца.

Указание. Нужно найти среднее значение вектора Умова — Пойнтинга за период колебаний и проинтегрировать это значение по какой-либо сферической поверхности, центр которой совпадает с вибратором (радиус сферы может быть любым, но должен значительно превышать длину волны, чтобы были справедливы приведенные выражения для E и H).

728. Найти сопротивление излучения $R_и$ симметричного полуволнового вибратора.

Указание. Сопротивлением излучения вибратора называется отношение полной мощности, излучаемой вибратором, к квадрату эффективного значения силы тока в пучности вибратора. Для подсчета полной мощности, излучаемой вибратором, нужно воспользоваться тем же методом, что и в предыдущей задаче, учитывая, однако, что сила тока в разных участках вибратора различна. Поэтому нужно разбить вибратор на отдельные малые элементы и подсчитать напряженности E и H, суммируя поля от отдельных элементов тока. Приближенно можно считать, что поля, создаваемые отдельными элементами тока, приходят в данную точку пространства в одинаковой фазе.

729. При тех же упрощающих предположениях, что и в предыдущей задаче, найти сопротивление излучения $R_и$ четвертьволнового заземленного вибратора.

730. В двух одинаковых полуволновых вибраторах, расположенных параллельно друг другу на расстоянии, малом по сравнению с длиной волны, возбуждаются токи одной и той же амплитуды и фазы. Каково сопротивление излучения каждого из вибраторов $R_и'$? Сопротивление излучения уединенного полуволнового вибратора $R_и=72$ Ом.

731. Сопротивление излучения волнового вибратора (т. е. вибратора, на длине которого укладывается одна волна) составляет ≈ 200 Ом. Объяснить, почему сопротивление излучения такого вибратора больше, чем сумма сопротивлений излучения двух уединенных полуволновых вибраторов, и меньше, чем сумма сопротивлений излучения двух расположенных рядом полуволновых вибраторов, описанных в предыдущей задаче.

732. Найти эффективную напряженность электрического поля $E_{эфф}$, создаваемого полуволновым вибратором в точке, расположенной в экваториальной плоскости вибратора на расстоянии $r=10$ км от него, если известно, что полная мощность, излучаемая вибратором, $N=10$ Вт.

Указание. Воспользоваться указаниями и результатами задач 727 и 728.

733. Найти мощность излучения N', падающую на параболический рефлектор диаметром $D=2$ м, если рефлектор направлен на полуволновой вибратор, мощность излучения которого $N=1$ кВт, и расположен в экваториальной плоскости этого вибратора на расстоянии $r=2$ км от него.

Указание. Воспользоваться указаниями и результатами задач 727 и 728.

734. Какую наибольшую мощность $N_{макс}$ может отдать приемнику присоединенный к нему полуволновый вибратор длиной $l=3$ м, если этот вибратор расположен параллельно направлению электрического вектора приходящей электромагнитной волны и эффективное значение напряженности электрического поля этой волны $E_{эфф}=2$ мкВ/м.

Указание. Нужно найти мощность, развиваемую электрическим полем приходящей волны в каждом элементе вибратора, подсчитать мощность, развиваемую во всем вибраторе, и найти ту часть этой мощности, которая при оптимальных условиях передачи мощности может быть передана приемнику.

735. Построить полярную диаграмму направленности вибратора Герца (см. задачу 727) в плоскости, проходящей через ось вибратора, и в плоскости, перпендикулярной к этой оси.

Указание. Полярной диаграммой направленности (по напряженности поля или по мощности) называется кривая, отсекающая на радиусе-векторе, проведенном от вибратора в некотором направлении, отрезок, изображающий в определенном масштабе напряженность поля (или плотность потока энергии соответственно), создаваемого вибратором в этом направлении на фиксированном (одинаковом для всех направлений) расстоянии от вибратора.

736. Указать качественно, как будет изменяться характеристика направленности вибратора по мере увеличения его длины при переходе от вибратора Герца к полуволновому вибратору.

737. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности в экваториальной плоскости для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, расположенных параллельно друг другу на расстоянии половины длины волны и питаемых токами одинаковой амплитуды и частоты, причем токи в обоих вибраторах: 1) совпадают по фазе; 2) противоположны по фазе.

738. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности в экваториальной плоскости для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, расположенных параллельно друг другу на расстоянии длины волны и питаемых токами одинаковой амплитуды и частоты, причем токи в обоих вибраторах противоположны по фазе.

739. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности в экваториальной плоскости для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, расположенных параллельно друг другу на расстоянии 1/4 длины волны и питаемых токами одинаковой амплитуды и частоты, сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

740. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности в экваториальной плоскости для антенны, состоящей из восьми параллельных друг другу полуволновых вибраторов, расположенных на одной прямой на расстоянии 1/2 длины волны друг от друга и питаемых токами одинаковой амплитуды, частоты и фазы. Найти угловой раствор главного лепестка диаграммы (т. е. лепестка, в котором напряженность поля достигает наибольшей величины) и оценить отношение напряженностей поля в главном и первом побочном максимуме.

741. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности расположенного над землей горизонтального полуволнового вибратора в экваториальной (т. е. вертикальной) плоскости, если землю можно считать идеально проводящей и высота h вибратора над землей равна: 1) четверти длины волны; 2) половине длины волны. Найти в экваториальной плоскости направления максимумов $\varphi_{\text{макс}}$ и минимумов (нулей) $\varphi_{\text{мин}}$ излучения этого вибратора в общем случае, когда высота его над землей $h=n\lambda$, где λ — длина волны.

Указание. Поскольку земля считается идеально проводящей, можно так же, как и в задачах электростатики, применить метод зеркального изображения.

742. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности в вертикальной плоскости вертикального четвертьволнового вибратора, нижний конец которого заземлен. Землю считать идеально проводящей.

743. Найти в вертикальной плоскости направления максимумов и минимумов излучения для вертикального полуволнового вибратора в случае, когда высота вибратора над землей (считая от середины вибратора) $h=n\lambda$, где λ — длина волны.

Указание. См. указание к задаче 741.

744. Плоская квадратная рамка со стороной $d=50$ см обмотана по периметру проводом, причем число витков провода $n=10$. По обмотке рамки протекает переменный ток, эффективная сила которого $I_{\text{эфф}}=5$ А и угловая частота $\omega=5\cdot10^6\,\text{с}^{-1}$. Найти эффективную напряженность

$E_{эфф}$ электрического поля, создаваемого этим током в направлении, перпендикулярном к стороне рамки и лежащем в плоскости рамки на расстоянии $r=1$ км от нее, и сравнить ее с напряженностью поля в экваториальной плоскости вибратора Герца, имеющего размер стороны рамки и питаемого таким же током.

Указание. Поскольку длина провода рамки мала по сравнению с длиной волны, можно считать, что сила тока во всех сечениях рамки одинакова, и для расчета напряженности поля пользоваться выражением поля для вибратора Герца (см. задачу 727).

745. Для плоской прямоугольной рамки, размеры которой малы по сравнению с длиной волны, построить диаграмму направленности в плоскости, перпендикулярной к плоскости рамки.

746. Плоская квадратная рамка, размеры которой приведены в задаче 744, находится в поле электромагнитной волны, причем направление распространения волны лежит в плоскости рамки, а электрическое поле волны параллельно одной из сторон рамки. Напряженность электрического поля приходящей волны $E=50$ мкВ/м и угловая частота $\omega=5\cdot10^6$ с$^{-1}$. Найти э. д. с., создаваемую приходящей волной в рамке, и сравнить с той э. д. с., которую создает эта волна в отрезке провода, служащем одной из сторон витка рамки.

747. Определить скорость v распространения гармонической электромагнитной волны в однородном слое ионосферы, если угловая частота волны $\omega=8\cdot10^7$ с$^{-1}$ и концентрация свободных электронов в этом слое $N=1\cdot10^6$ см$^{-3}$.

Указание. Влияние свободных электронов на скорость распространения волны можно определить, рассматривая смещения электронов под действием электрического поля приходящей волны как «поляризацию» ионосферы, вследствие чего электрическая индукция в ионосфере оказывается отличной от напряженности электрического поля. Отношение этих величин представляет собой диэлектрическую проницаемость ионосферы для полей высокой частоты.

748. Преломление радиоволн в ионосфере (в результате чего они снова возвращаются к Земле) упрощенно можно рассматривать как полное внутреннее отражение от резкой границы ионосферы. Исходя из этого упрощенного представления, определить наиболее короткую волну $\lambda_{мин}$, которая еще возвратится к Земле, если угол ее падения на

границу ионосферы (угол с нормалью к границе) $\varphi=45°$, а концентрация электронов в ионосфере $N=1\cdot10^{6}$ см$^{-3}$.

Указание. Воспользоваться результатами решения предыдущей задачи.

§ 11. Релятивистская электродинамика[1])

749. В релятивистской электродинамике плотность заряда ρ и плотность тока $\boldsymbol{j}$ образуют 4-вектор плотности тока $\vec{s}(j_x,\ j_y,\ j_z,\ ic\rho)$. Правила преобразования величин, образующих 4-вектор $\vec{s}$, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой — это правила преобразования компонент любого 4-вектора (см. формулы (13), (14)). Применить эти правила для решения следующих задач:

1) В системе K' распределен с плотностью ρ' неподвижный электрический заряд. Найти плотность заряда ρ и плотность тока $\boldsymbol{j}$ в любой другой системе отсчета K. Показать, что величина заряда в заданном объеме является инвариантом.

2) В системе K' плотность тока, идущего по проводнику, равна $\boldsymbol{j}'$, объемная плотность заряда в проводнике ρ' равна нулю. Найти плотность тока $\boldsymbol{j}$ и плотность заряда ρ в любой другой системе отсчета K.

750. Воспользовавшись результатом п. 1) задачи 749 для преобразования плотности заряда, записать 4-вектор плотности тока через 4-скорость (18) и плотность заряда ρ в собственной системе заряда.

751. В релятивистской электродинамике трехмерные электромагнитные потенциалы — скалярный φ и векторный $\boldsymbol{A}$ — объединяются в 4-вектор потенциала $\vec{\Phi}\left(\boldsymbol{A},\ \frac{i}{c}\varphi\right)$.

Используя определения 4-радиуса-вектора $\vec{R}$ (см. (7)) и 4-потенциала $\vec{\Phi}$ (см. (28)), показать, что две трехмерные формулы, определяющие электромагнитное поле через трехмерные потенциалы $\boldsymbol{A}$, φ:

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\dot{\boldsymbol{A}},$$

---

[1]) В этом параграфе всюду использована система СИ. В качестве систем отсчета используются исключительно инерциальные системы отсчета. Как в условиях, так и в решениях задач данного параграфа приводятся ссылки на формулы приложения III.

сливаются в одну четырехмерную формулу:

$$F_{ik}=c\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}\right)\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Обратите внимание на то, что $F_{ik}=-F_{ki}$.

752. Расположить величины F_{ik}, полученные в задаче 751 и выраженные через векторы поля, в виде квадратной таблицы, считая у F_{ik} первый индекс номером строки, а второй — номером столбца. Полученная таблица определяет компоненты тензора электромагнитного поля в данной системе отсчета.

753. Тензорный (и векторный) характер величин определяется правилом преобразования этих величин при преобразованиях координат. В СТО такими преобразованиями являются преобразования Лоренца. Найти правила преобразования величин F_{ik}, исходя из преобразований Лоренца и определения F_{ik} как разности производных компонент 4-вектора $\vec{\Phi}$ по координатам. Полученные преобразования определяют правила преобразования компонент тензора (33), (34).

754. Воспользовавшись правилом преобразования компонент тензора, полученным в предыдущей задаче, найти правила преобразования компонент E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z векторов поля, имея в виду, что $E_x=iF_{14}/c$, $B_z=F_{12}/c$ и т. д.

755. Разбив векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ на составляющие вдоль направления относительного движения систем отсчета и перпендикулярно ему, выписать формулы преобразования векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ в векторной форме. Выписать формулы обратного перехода, т. е. от системы отсчета K к K'.

756. Записать формулы преобразования векторов поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ при переходе от системы K к системе K', движущейся с произвольно направленной скоростью $\boldsymbol{V}$.

757. Используя результат, полученный в задаче 755, выписать формулы преобразования для векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ для случая, когда относительная скорость систем отсчета нерелятивистская, т. е. $V/c\ll 1$.

758. Найти взаимное расположение векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ в произвольной инерциальной системе отсчета, если известно, что в системе K' либо $\boldsymbol{E}'=0$, либо $\boldsymbol{B}'=0$.

759. С помощью формул, полученных в задаче 754, показать, что выражения $c^2B^2-E^2=I_1$ и $\boldsymbol{EB}=I_2$ представляют собой инварианты преобразований Лоренца.

760. Используя инварианты электромагнитного поля, найти условия, когда выбором системы отсчета можно получить либо чисто электрическое, либо чисто магнитное поле, если исходные электрическое и магнитное поля однородны.

761. Если в некоторой системе отсчета K' поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ взаимно перпендикулярны (см. задачу 760), то можно подобрать систему отсчета K, в которой одно из полей исчезает. Найти скорость системы отсчета K, в которой одно из полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ исчезает (в системе K' выполняется условие $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}'=0$).

762. В системе K' электрическое и магнитное поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ однородны, но произвольно направлены. Найти скорость системы отсчета K, в которой поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ окажутся параллельными.

763. 1) Проверить, что компоненты плотности силы Лоренца $\boldsymbol{f}$ есть три первые компоненты плотности 4-силы $\vec{\mathfrak{f}}$, которые определяются тензорным соотношением

$$\mathfrak{f}_i=\frac{1}{c}F_{ik}s_k \quad \text{(суммирование по } k\text{)},$$

где F_{ik} — компоненты тензора электромагнитного поля (32), а s_k — компоненты 4-плотности тока (27). Найти четвертую компоненту плотности 4-силы $\vec{\mathfrak{f}}$.

2) Проверить, что тензорное соотношение

$$s_i=\frac{\sigma}{c}F_{ik}u_k,$$

где u_k — компоненты 4-скорости тела (среды), является релятивистской инвариантной записью дифференциального закона Ома $j=\sigma E$. Записать четвертую компоненту этого уравнения и выяснить ее физический смысл.

764. Найти электрическое и магнитное поля равномерно и прямолинейно движущегося заряда e, производя преобразование полей от системы отсчета K', в которой заряд покоится. Убедиться в том, что силовые линии магнитного поля, создаваемого движущимся зарядом,— окружности с центром на траектории заряда, плоскость которых нормальна к этой траектории.

765. Найти электромагнитные потенциалы φ, $\boldsymbol{A}$ точечного заряда e, движущегося равномерно и прямолинейно со скоростью V, совершив преобразования Лоренца для потенциалов от системы отсчета K', где заряд покоится.

766. Найти индукцию магнитного поля B равномерно движущегося точечного заряда e, если скорость заряда нерелятивистская, т. е. $V/c \ll 1$.

767. Два заряда e_1 и e_2 движутся параллельно друг другу с одинаковыми скоростями V. Определить силу взаимодействия между ними в системе K, относительно которой они движутся.

Указание. Пусть заряды находятся в системе K', причем заряд e_1 находится в начале отсчета O', а заряд e_2 — на оси Y, так что расстояние между зарядами равно y. Найдите проекции силы взаимодействия на оси X и Y в этом случае из общей формулы.

768. Электрический диполь с моментом $\boldsymbol{p}_0$ (в собственной системе) движется равномерно и прямолинейно со скоростью V. Найти создаваемое им электромагнитное поле $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, вычислив электромагнитные потенциалы φ, $\boldsymbol{A}$.

Указание. Исходить из потенциалов в собственной системе отсчета, применить преобразования Лоренца к этим потенциалам.

769. Дать качественное объяснение опыту Вильсона. Полый цилиндр из диэлектрика находится в магнитном поле, направленном вдоль оси цилиндра. Цилиндр вращается вокруг своей оси. При этом обнаруживается поляризация цилиндра в радиальном направлении. Что изменится, если цилиндр обладает проводимостью? Можно ли воспользоваться таким цилиндром как источником тока?

770. Дать качественное объяснение опыту Рентгена — Эйхенвальда. Круглый эбонитовый диск вращается вокруг

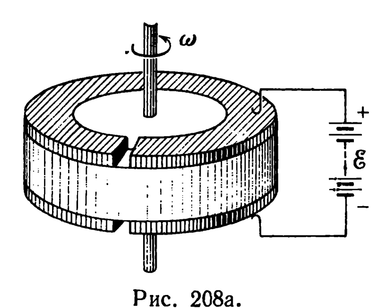


Рис. 208а.

своей оси, сверху и снизу к диску плотно прижаты металлические кольца с разрезом (рис. 208а). Кольца соединены с полюсами источника э. д. с., так что этот «конденсатор» заряжен до некоторой разности потенциалов. Диск

вместе с кольцами приводят во вращение. При этом вблизи вращающегося диска с помощью магнитной стрелки можно обнаружить магнитное поле.

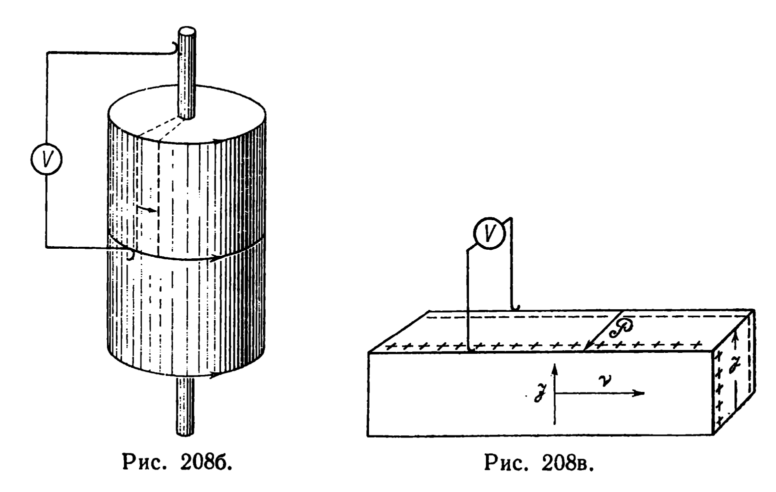


Рис. 208б.

Рис. 208в.

771. Дать качественное объяснение явлению униполярной индукции. Цилиндрическое проводящее тело, намагниченное вдоль оси цилиндра, вращается около своей оси (рис. 208б). Если расположить скользящие контакты на оси и поверхности цилиндра и замкнуть цепь, возникает электрический ток.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1. Электростатика

1. $F \approx 918$ кгс.

2. $F \approx 23 \cdot 10^{-4}$ дин.

3. $q = 2786$ СГСЭ.

4. Равновесие будет неустойчивым.

Решение. Рассмотрим случай, когда заряд, находящийся посередине, противоположен по знаку двум другим зарядам. Если этот заряд немного отклонился от положения равновесия в направлении линии, на которой лежат все заряды, сила притяжения, действующая со стороны более близкого заряда, увеличится, а со стороны более далекого — уменьшится, вследствие чего заряд будет дальше уходить от положения равновесия. Значит, положение равновесия неустойчиво.

Если заряд, находящийся посередине, того же знака, что и два других, то при отклонении его вдоль линии, соединяющей все заряды, возникнут силы, которые будут возвращать средний заряд в положение равновесия. Однако если средний заряд отклонится в направлении, перпендикулярном к линии, соединяющей заряды, то равнодействующая сил отталкивания уже не будет равна нулю и будет направлена в ту же сторону, куда сместился заряд. Вследствие этого заряд будет еще дальше уходить от положения равновесия. Значит, равновесие неустойчиво.

Вывод, полученный нами для простейшего случая, справедлив всегда. Если в системе свободных электрических зарядов действуют только кулоновы силы взаимодействия, то равновесие всегда оказывается неустойчивым (теорема Ирншоу).

5. $T = 2\pi d \sqrt{\frac{2J}{q_1 q_2 l}}$, где q_1 и q_2 — заряды шарика и кружка, а J — момент инерции стрелки.

6. $\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{Gm_e} = \begin{cases} 1{,}24 \cdot 10^{36} \text{ для протонов}, \\ 4{,}17 \cdot 10^{42} \text{ для электронов}, \end{cases}$

где G — гравитационная постоянная.

7. 1) $n = \varphi r/e \approx 2\cdot 10^{10}$ электронов; 2) $\Delta M = m_e n \approx 2\cdot 10^{-17}$ г.

8. $v = \sqrt{\dfrac{3}{5}\dfrac{q^2}{mr}}$.

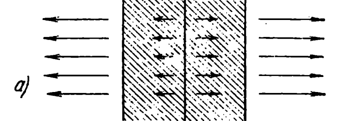
9. $Q = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}q$ [1]).

10. $Q = q/\sqrt{3}$ [1]).

11. Так как сумма зарядов во всей системе не равна нулю и проводник A не охватывает со всех сторон заряд q, то часть силовых линий заряда q уйдет в бесконечность (или окончится на других проводниках) и только часть силовых линий, исходящих из заряда q, оканчивается на индуцированном заряде. Значит, индуцированный заряд меньше q.

12. Решение. При поднесении проводника к пластинке общий заряд в определенном отношении распределяется между этими телами. При первом поднесении проводник получает заряд q_1, на пластинке остается $Q - q_1$. Если операция зарядки повторена многократно, то при последующих прикосновениях проводника к пластинке его заряд практически уже меняться не будет. Заряд пластинки также не будет меняться и будет равен Q, поскольку пластинка заряжается от электрофора. Искомый заряд q определится из пропорции

$$\frac{q}{Q} = \frac{q_1}{Q - q_1}.$$



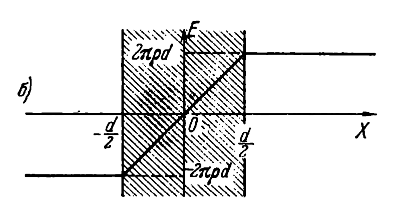


Рис. 209.

13. Поле перпендикулярно к поверхности слоя и направлено, как указано на рис. 209, *а*. Вне слоя $E = \pm 2\pi\rho d$, внутри слоя $E = 4\pi\rho x$. Ось X перпендикулярна к поверхности слоя, $x = 0$ в середине слоя. Изменение напряженности поля E в зависимости от x изображено на рис. 209, *б*.

14. $q = \dfrac{mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2\pi\sigma} = 9$ СГСЭ.

15. 1) $F = \dfrac{dr}{(d^2 - r^2)^2}q^2$; 2) $F = \left(\dfrac{dr}{(d^2 - r^2)^2} - \dfrac{r}{d^3}\right)q^2$.

16. 1) $A = \dfrac{rq^2}{d^2 - r^2}$; 2) $A = \dfrac{r^3 q^2}{2d^2(d^2 - r^2)}$.

---

[1]) Рассуждениями, аналогичными тем, которые приведены в задаче 4, легко убедиться, что положение равновесия и в этом случае будет неустойчивым.

17. 1) $\sigma=\frac{q}{4\pi R^2}$; 2) $\varphi=\frac{q}{R}$; 3) $\sigma_B=\frac{q}{4\pi(r-d)^2}\left(1+\frac{d}{r}\right)$, $\sigma_C=\frac{q}{4\pi(r+d)^2}\left(1-\frac{d}{r}\right)$.

18. $E=\frac{8\varkappa d}{d^2+4h^2}$.

19. $E=2\pi\sigma\left(1-\frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)=\sigma\Omega$, где Ω — телесный угол, под которым виден диск из данной точки.

20. Решение. Плоскость симметрии между двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$ есть плоскость нулевого потенциала. Поэтому, если в эту плоскость поместить бесконечную проводящую плоскость, то картина поля не изменится. Следовательно, поле, созданное зарядом $+q$ и зарядами, индуцированными на плоскости, будет тождественно с упомянутым полем двух точечных зарядов $+q$ и $-q$ (рассматриваемым, конечно, по одну сторону от плоскости симметрии). Поэтому силы, действующие на заряд $+q$, в обоих случаях должны быть одинаковыми.

21. $F=\frac{q}{2d^2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$. Сила F направлена к вершине двугранного угла O.

22. Решение. Нетрудно убедиться, что электрическим изображением заряда q относительно поверхности AOB будет совокупность пяти зарядов: q_1, q_2, q_3, q_4, q_5. Поле этих зарядов и заряда q в точке O равно нулю. Результат не изменится, если заряд q будет неточечным.

23. Решение. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 6. Сгруппируем заряды попарно: 1) q с $-q$, 2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем теперь те же заряды по-другому: 1) q с q', 2) $-q$ с $-q'$. При такой группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере $CMDN$. Ясно поэтому, что потенциал четырех зарядов q, $-q$, q', $-q'$ обращается в нуль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

24. $F=\frac{3p^2}{8d^4}$; $A_{12}=\frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{d_1^3}-\frac{1}{d_2^3}\right)$. Обратим внимание, что перемещение диполя сопровождается смещением индуцированных им зарядов. Однако это смещение происходит перпендикулярно к силовым линиям и поэтому не сопровождается дополнительной работой.

25. $E=\frac{q}{5h^2}\sqrt{26-2\sqrt{5}}$.

Указание. Поле, создаваемое зарядами, индуцированными на проводящей поверхности, можно рассматривать как поле точечного заряда $-q$, находящегося на расстоянии h за плоскостью симметрично основному заряду $+q$ (см. решение задачи 20).

26. $V = 2\pi\sigma d$.

27. В точках A и B напряженность поля возрастет в три раза, в точках C и D обратится в нуль.

28. См. рис. 210. Рисунок представляет собой распределение линий поля в плоскости, проходящей через данные заряды. Сплошные линии — силовые линии, пунктирные линии — эквипотенциальные линии. Жирная линия, проходящая через точку A, отделяет силовые линии заряда $+q$ от силовых линий заряда $+4q$. Точка A находится на расстоянии $^2/_3 d$ от заряда $4q$. В точках B и C потенциал поля равен потенциалу поля в точке A: $\varphi_A = \frac{4q}{^2/_3 d} + \frac{q}{^1/_3 d} = \frac{9q}{d}$. Расстояние d_1 от заряда $4q$ до точки C можно определить из равенства $\varphi_C = \frac{4q}{d_1} + \frac{q}{d + d_1} = \varphi_A$, или $d_1 = \frac{2\sqrt{10} - 2}{9} d$. Аналогично найдется расстояние d_2 от заряда q до точки B: $d_2 = \frac{\sqrt{13} - 2}{9} d$. На очень большом расстоянии от зарядов эквипотенциальные линии должны быть близки к кругам.

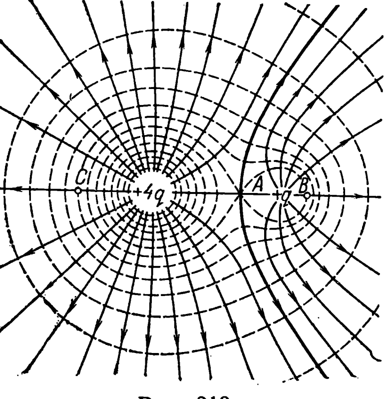


Рис. 210.

29. $R = \frac{dn}{n^2 - 1}$; $h = -\frac{d}{n^2 - 1}$.

Указание. Взять за начало координат точку, в которой находится меньший заряд, направить ось X в сторону большего заряда и написать потенциал в точке (x, y) плоскости, проходящей через линию соединения зарядов, а затем приравнять его нулю.

30. $F = 2qp/d^3$. Диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, а отталкиваться в противном случае.

31. $F = 6p_1 p_2/d^4$. Диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае.

32. Решение. Разложим вектор $\boldsymbol{p}$ (рис. 211) на составляющую $\boldsymbol{p}_{\parallel}$ вдоль радиуса $\boldsymbol{r}$ и составляющую $\boldsymbol{p}_{\perp}$, к нему перпендикулярную. Соответствующие им поля в точке наблюдения A будут

$$E_{\parallel}=2p_{\parallel}/r^3, \qquad E_{\perp}=-p_{\perp}/r^3.$$

Угол β между радиусом $\boldsymbol{r}$ и электрической силовой линией определится формулой

$$\operatorname{tg}\beta=E_{\perp}/E_{\parallel}=p_{\perp}/(2p_{\parallel})={}^1/_2\operatorname{tg}\vartheta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора $\boldsymbol{p}_{\perp}$ может быть, с одной стороны, представлена как $dr\operatorname{tg}\beta=(dr/2)\operatorname{tg}\vartheta$; с другой стороны,— как $r\operatorname{tg}\vartheta$. Поэтому $(dr/2)\operatorname{tg}\vartheta=r\,d\vartheta$. Интегрируя это уравнение, получаем искомое уравнение электрической силовой линии: $r=r_0\sin^2\vartheta$. Постоянная r_0 имеет смысл длины радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ в экваториальной плоскости, т. е. при $\vartheta=\pi/2$.

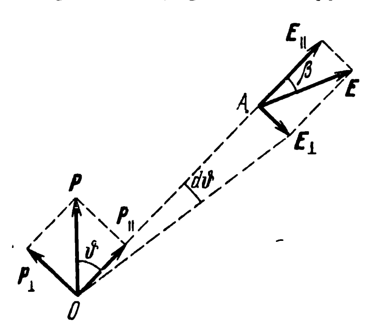


Рис. 211.

33. Да, возможны, и притом на любом расстоянии заряда от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиусом-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos\alpha=\mp\sqrt{1/3}$, где минус относится к положительному заряду, а плюс — к отрицательному.

34. $\varphi=\dfrac{q}{d}+\dfrac{Q}{R}$.

Решение. Потенциал точки O равен

$$\varphi=\frac{q}{d}+\sum\frac{\Delta Q_i}{R_i}=\frac{q}{d}+\frac{Q}{R}.$$

Потенциал шара будет иметь то же значение.

35. $$\varphi=\begin{cases}\dfrac{Q}{R}+\dfrac{q}{d}, & \text{если } d>R,\\[2mm] \dfrac{Q}{R}+\dfrac{q}{R}, & \text{если } d\leqslant R.\end{cases}$$

Решение. Если заряд находится вне шара, то $\varphi=\dfrac{Q}{R}+\dfrac{q}{d}$ (см. решение предыдущей задачи). Если заряд находится внутри шара, то поле снаружи будет сферически симметричным и $\varphi=\dfrac{q+Q}{R}$.

36. Рассмотрим картину поля в плоскости, перпендикулярной к проводам (рис. 212). Для произвольной точки плоскости M потенциал поля сложится из потенциалов поля каждого провода. Потенциал поля левого провода, если r — расстояние точки от провода, равен

$$V_1 = \int \frac{2\sigma}{r}\, dr = 2\sigma \ln r_1 + C_1.$$

Потенциал поля правого провода, аналогично, есть

$$V_2 = -\int \frac{2\sigma}{r}\, dr = -2\sigma \ln r_2 + C_2.$$

Потенциал поля обоих проводов будет

$$V = V_1 + V_2 = 2\sigma \ln (r_1/r_2) + C_1 + C_2. \qquad (36.1)$$

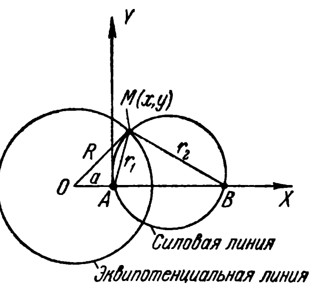


Рис. 212.

Так как при удалении в бесконечность $V \to 0$ и $\ln (r_1/r_2) \to 0$, то из (36.1) следует $V = 2\sigma \ln (r_1/r_2)$. Если $r_1/r_2 = k$ — величина постоянная, то и V постоянно.

Возьмем след левого провода на плоскости за начало координат, прямую, проходящую через следы обоих проводов,— за ось X. Тогда эквипотенциальные линии определятся из соотношения (рис. 212)

$$\frac{r_1}{r_2} = k = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} : \frac{1}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}},$$

откуда

$$\left(x + \frac{d}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2 d^2}{(k^2-1)^2}.$$

Это — уравнение окружности радиуса $R = \frac{kd}{|k^2-1|}$ с центром в точке O, абсцисса которой равна $a = -\frac{d}{k^2-1}$. Так как в данном случае

$$OA \cdot OB = (-a)(-a+d) = \frac{k^2 d^2}{(k^2-1)^2} = R^2 = OM^2,$$

то OM можно рассматривать как длину отрезка касательной к окружности, проходящей через точки A, M, B. Центр ее лежит на прямой, проходящей через середину AB перпендикулярно к AB. Таким образом, обе окружности в точках их пересечения взаимно ортогональны. Через любую точку M окружности AMB можно провести единственную эквипотенциальную линию, поэтому окружность AMB будет силовой линией.

37. См. рис. 213. Рисунок показывает картину поля в произвольной плоскости, проходящей через данные заряды. Все силовые линии, расположенные в области, ограниченной жирной линией,

проходящей через точку A, в которой напряженность поля равна нулю, идут от заряда $+q$ к заряду $-4q$, а остальные приходят из бесконечности. Расстояние от точки A до заряда $+q$ равно d. Потенциал в точке B равен нулю, поэтому через нее проходит

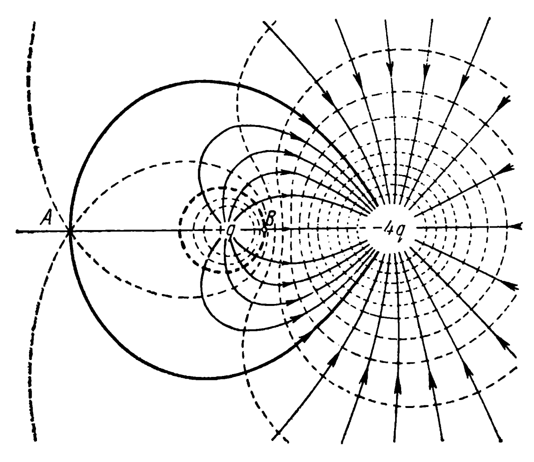


Рис. 213.

сферическая эквипотенциальная поверхность, радиус которой равен $^4/_{15}d$, а центр лежит на расстоянии $^1/_{15}d$ от заряда $+q$ (см. задачу 28).

38. $Q=q/2$.

Решение. Поверхность металлического шара имеет потенциал, равный нулю (так как шар заземлен). Такую же поверхность нулевого потенциала и такое же поле вне ее мы получим, если вместо шара (удалив его) поместим заряд $Q=q/2$ в точке, находящейся на прямой, соединяющей заряд с центром шара, на расстоянии $R/2$ от центра шара (см. задачу 29).

39. $Q=q\alpha\dfrac{1-(1-\alpha^2)^2}{(1-\alpha^2)^2}$, где $\alpha=r/d$.

Решение. Поляризованный шар в условиях этой задачи может быть заменен парой зарядов: $q'=-qr/d$ на расстоянии $b=r^2/d$ от центра и $Q'=Q-q'$ в центре (Q — полный заряд шара). Сила взаимодействия будет

$$F=\frac{qq'}{(d-b)^2}+\frac{qQ'}{d^2}=-q^2\frac{dr}{(d^2-r^2)^2}+q^2\frac{r}{d^3}+qQ\frac{1}{d^2}.$$

Из условия $F=0$ имеем

$$Q=q\frac{r}{d}\frac{d^4-(d^2-r^2)^2}{(d^2-r^2)d}=q\alpha\frac{1-(1-\alpha^2)^2}{(1-\alpha^2)^2},$$

где $\alpha=r/d$.

40. $F = -\frac{q^2}{d^2}\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2}$, где $\alpha = r/d$.

Решение. Поле наведенного на шаре заряда по методу отражений можно заменить полем точечного заряда q', помещенного на расстоянии b от центра (см. рис. 12). Величину q' и отрезок b следует выбрать так, чтобы поверхность шара совпала с поверхностью нулевого потенциала зарядов q и q' (см. задачу 29). Из этого условия получим $q' = -qr/d$, $b = r^2/d$. Сила взаимодействия заряда с шаром равна силе притяжения зарядов q и q':

$$F = \frac{qq'}{d^2} = -\frac{(r/d)\,q^2}{(d-r^2/d)^2} = -\frac{q^2}{d^2}\frac{\alpha}{(1-\alpha^2)^2},$$

где $\alpha = r/d$. Знак «—» означает притяжение зарядов.

41. $q' = -qr/d$.

Решение. Шар нулевого потенциала должен обладать зарядом $q' = -qr/d$ (см. предыдущую задачу); следовательно, именно такой заряд протечет при заземлении шара.

42. $\sigma_1 = \frac{-q}{4\pi(d+R)^2}\left(\frac{d}{R}-1\right)$, $\sigma_2 = \frac{-q}{4\pi(d-R)^2}\left(\frac{d}{R}+1\right)$.

Решение. Поле снаружи шара совпадает с полем пары зарядов q и q' (см. задачу 2). С другой стороны, поверхностная плотность заряда на шаре связана с полем вблизи его поверхности: $\sigma = \frac{1}{4\pi}E$. В окрестности точки M_2 имеем

$$E_2 = \frac{q}{(d+R)^2} + \frac{q'}{(b+R)^2}, \quad \text{где} \quad q' = -q\frac{R}{d}, \quad b = \frac{R^2}{d},$$

отсюда

$$E_2 = -\frac{q}{(d+R)^2}\left(\frac{d}{R}-1\right).$$

Аналогично, в окрестности точки M_1

$$E_1 = -\frac{q}{(d-R)^2}\left(\frac{d}{R}+1\right).$$

43. $E = 2\pi\sigma$.

Решение. Пусть σ — поверхностная плотность заряда на сфере. Тогда поле вблизи наружной ее поверхности будет $E = 4\pi\sigma$; внутри сферы $E = 0$. То же самое поле может быть представлено как сумма поля малого диска с поверхностной плотностью σ, вырезанного из сферы, и поля остальной части поверхности. Поле вблизи центра диска будет, как известно, равно $E = \pm 2\pi\sigma$ (знак зависит от стороны диска). Следовательно, поле остальной части сферы составляет $2\pi\sigma$.

44. Распределение потенциала во всех плоскостях, перпендикулярных к заряженной линии, одинаково. Эквипотенциальные поверх-

ности — коаксиальные цилиндры, ось которых — заряженная линия. Разность потенциалов между цилиндрами радиусов r и R ($R > r$) равна $2\varkappa \ln (R/r)$. Но в бесконечности потенциал не имеет конечного значения, так как работа сил поля по удалению положительного единичного заряда из данной точки (r) в бесконечность не имеет конечного значения. Конечное значение имеет только разность потенциалов между двумя точками поля. Результат этот обусловлен тем, что мы считаем проводник бесконечным, и, значит, нельзя говорить о точках, бесконечно удаленных от проводника, так как «бесконечно удаленная точка» физически означает точку, удаленную на расстояние, большое по сравнению с размерами проводника.

При рассмотрении реальных полей таких затруднений не возникает, так как размеры проводников конечны. Всякий заряженный проводник на достаточно большом расстоянии от него можно рассматривать как точку. Следовательно, пользуясь условным представлением реальных проводников в виде бесконечных, можно рассчитывать поле только вблизи конечного проводника (на расстояниях, малых по сравнению с длиной проводника).

45. $V = 4\pi\sigma R \ln (d/R)$.

Указание. Напряженность поля в точке, находящейся от оси цилиндра на расстоянии x, большем r, равна $E = 4\pi r\sigma/x$.

47. Поле параллельно оси X и напряженность его $E = ax$. Такое поле будет существовать внутри слоя, ограниченного бесконечными плоскостями, перпендикулярными к оси X, и заряженного равномерно с объемной плотностью $\rho = a/4\pi$ (см. задачу 13).

48. Решение. Вычислим поле внутри шара. Ввиду шаровой симметрии

$$\mathbf{E} = E(r)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

или, в координатной форме,

$$E_x = E(r)\frac{x}{r}, \quad E_y = E(r)\frac{y}{r}, \quad E_z = E(r)\frac{z}{r}.$$

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\partial r/\partial x = x/r$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3}x^2 + \frac{E}{r}.$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\partial E_y/\partial y$, $\partial E_z/\partial z$ и сложив, получим

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E).$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E)=4\pi\rho,$$

откуда

$$E=\frac{4\pi}{3}\rho r+\frac{C}{r^2}.$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений.

Вне шара на расстоянии r от центра

$$E=\frac{4\pi}{3}\frac{R^3\rho}{r^2}.$$

Аналогично вычисляется поле внутри пластинк.

49. $\boldsymbol{E}=\frac{4\pi}{3}\rho\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OO'}$. Поле однородно.

52. Поверхностная плотность электричества на эллипсоиде

$$\sigma=\frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2},$$

где q — общий заряд эллипсоида.

53. $\sigma=\frac{q}{4\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-1/2}$.

55. $Q=5{,}92\cdot10^5$ Кл; $\varphi=2{,}7\cdot10^6$ СГСЭ $=8{,}2\cdot10^8$ В.

56. $t=\frac{\mathscr{E}}{4\pi R\mathscr{I}e^2}\approx10^6\text{ с}\approx10\text{ сут}$ (R — радиус Земли, e — заряд протона; численный ответ получен при $\mathscr{E}/e\sim10^9$ В). В действительности потенциал Земли не может достигать такого значения, так как, наряду с приходом протонов, существует обратный процесс, в котором земная атмосфера теряет положительные заряды в виде протонов и положительных ионов, уходящих в космическое пространство под действием возникшего электрического поля.

57. 1) $E=2q/d^2$; 2) $E=8q/9d^2$.

Указание. См. задачу 20.

58. $F=\frac{r^3}{2}\frac{\partial E^2}{\partial x}$; сила F направлена в сторону возрастания поля E.

59. $F\sim1/d^5$.

60. $E=\frac{4}{5\sqrt{5}}\frac{q}{d^2}$; поле $\boldsymbol{E}$ перпендикулярно к плоскости и направлено к ней.

61. 1) Нет. 2) Внутри будет, снаружи нет.

62. $E=\pi\sigma$.

Решение. Напряженность поля, создаваемая в центре сферы радиуса R зарядами, находящимися на кольце шириной $R\,d\vartheta$, вы-

резанном из полусферы, несущей заряд плотности σ, будет вследствие симметрии перпендикулярна к плоскости этого кольца (рис. 214). Поэтому при расчете напряженности поля зарядов каждого элемента кольца мы будем учитывать только нормальную составляющую к плоскости кольца. Эта составляющая, очевидно, равна $\frac{\sigma R^2 \sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta}{R^2}d\varphi$.
Интегрируя по φ от 0 до 2π, получаем напряженность, создаваемую зарядами, находящимися на кольце: $2\pi\sigma\sin\vartheta\cos\vartheta\, d\vartheta$. Интегрируя по углу ϑ от 0 до $\pi/2$, получаем, что напряженность поля, создаваемая зарядами первой половины сферы, равна $E=\pi\sigma$.

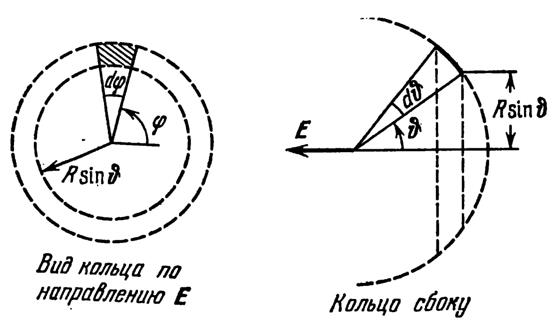


Рис. 214.

Поле, создаваемое зарядами второй половины сферы, будет иметь противоположное направление и величину $2\pi\sigma$. Следовательно, результирующая напряженность поля в центре сферы равна $\pi\sigma$ и направление ее противоположно направлению E, указанному на рис. 214.

63. Вне оболочки не изменится, внутри уменьшится в ε раз.

64. Поле, вообще говоря, изменится не только внутри, но и вне оболочки, особенно заметно вблизи «неровной» границы диэлектрика. «Неровность» границы следует оценивать по отношению к сферической границе диэлектрика.

65. Увеличится, так как поверхностная плотность заряда на металлической пластинке против диэлектрика возрастет.

66. Решение. В окрестности точки A поле должно стремиться к бесконечности, как кулоново поле точечного заряда q. Поэтому поле в первом диэлектрике должно содержать слагаемое $q\mathbf{r}/(\varepsilon_1 r^3)$. К нему надо добавить поле поляризационных зарядов, возникших на границе раздела диэлектриков. Введем предположение, оправдываемое последующими вычислениями, что поле поляризационных зарядов в первом диэлектрике эквивалентно полю какого-то точечного заряда q', помещенного в точке A', зеркально симметричной

с A относительно границы раздела. Тогда для поля в первом диэлектрике можно написать

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3} r + \frac{q'}{\varepsilon_1 r'^3} r',$$

где r и r' — радиусы-векторы, проведенные из зарядов q и q' в рассматриваемую точку. Введем второе предположение, также оправдываемое последующими вычислениями, что поле во втором диэлектрике представляется выражением

$$E_2 = \frac{q''}{\varepsilon_2 r^3} r,$$

причем второй (фиктивный) заряд q'' совмещен пространственно с зарядом q (на рис. 15 он не изображен).

Теперь необходимо выражения для E_1 и E_2 «сшить», чтобы на границе раздела диэлектриков удовлетворялись граничные условия: непрерывность касательных компонент вектора E и нормальных компонент вектора D. Первое условие имеет вид

$$\frac{q}{\varepsilon_1} \sin\varphi + \frac{q'}{\varepsilon_1} \sin\varphi = \frac{q''}{\varepsilon_2} \sin\varphi,$$

а второе

$$q\cos\varphi - q'\cos\varphi = q''\cos\varphi.$$

Существенно, что угол φ выпадает из обоих уравнений. Поэтому, если q' и q'' определить из этих уравнений, граничные условия будут удовлетворены во всех точках границы раздела. Таким путем находим

$$E_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r^3} r - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r'^3} r', \qquad E_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{q}{r^3} r.$$

67. $F = \frac{1}{4\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{q^2}{d^2}$, где d — расстояние заряда от границы раздела. Заряд притягивается к плоскости, если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, и отталкивается, если $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

68. $Q = ER^2 = 22\,500$ СГСЭ.

69. $P = 2\pi\sigma^2 = \frac{2\pi Q^2}{(4\pi R^2)^2} = \frac{Q^2}{8\pi R^4}$.

Указание. Пусть σ — поверхностная плотность зарядов на сфере. Напряженность поля снаружи у поверхности сферы равна $4\pi\sigma$, а внутри равна нулю. Выделим мысленно элемент поверхности dS. Поле у поверхности можно рассматривать как результат наложения двух полей: 1) поля зарядов, находящихся на элементе dS и создающих напряженность $2\pi\sigma$ снаружи и внутри, и 2) поля всех остальных зарядов; следовательно, поле остальных зарядов равно $2\pi\sigma$ и направлено наружу. Отсюда сила, действующая изнутри на элемент dS, равна $2\pi\sigma\sigma\, dS$. Поэтому давление будет $2\pi\sigma^2$.

70. На единицу поверхности незаряженного мыльного пузыря действуют: 1) сила давления, обратно пропорциональная объему пузыря, т. е. пропорциональная $1/R^3$, и направленная наружу, и 2) сила поверхностного натяжения, пропорциональная $1/R$ и направленная внутрь пузыря. При определенном радиусе R эти силы уравновешивают друг друга:

$$\frac{a}{R^3}-\frac{c}{R}=0,$$

где постоянные a и c зависят от конкретных условий опыта. Сообщив мыльному пузырю заряд, мы добавим к силе, действующей наружу, еще силу электростатического отталкивания зарядов (см. задачу 69), пропорциональную $1/R^4$. Для равновесия необходимо, чтобы

$$\frac{a}{R_1^3}+\frac{b}{R_1^4}-\frac{c}{R_1}=0.$$

Отсюда можно получить связь между изменением сил, действующих на единицу поверхности пузыря, и изменением ΔR_1 радиуса:

$$\Delta P=-\left(\frac{3a}{R_1^3}+\frac{4b}{R_1^4}-\frac{c}{R_1}\right)\frac{\Delta R_1}{R_1}.$$

Величина, стоящая в скобках, положительна, поэтому равновесие будет устойчивым. Увеличение R_1 вызовет большее уменьшение сил, действующих наружу, а потому результирующая сила будет уменьшать радиус, т. е. возвращать его к равновесному значению R_1. Наоборот, уменьшение радиуса вызовет большее увеличение тех же сил и равнодействующая сила будет увеличивать радиус.

71. $Q^2=16\pi r^3(12\sigma+7Pr)$. Если $r\gg\sigma/P=5\cdot10^{-5}$ см, как это имеет место в условии задачи, то $Q=4r^2\sqrt{7\pi P}=1{,}87\cdot10^4$ СГСЭ$=6{,}2\cdot10^{-6}$ Кл. В этом случае заряд Q практически не зависит от поверхностного натяжения. В противоположном случае, когда $r\ll\sigma/P=5\cdot10^{-5}$ см, $Q=8\sqrt{3\pi\sigma r^3}$.

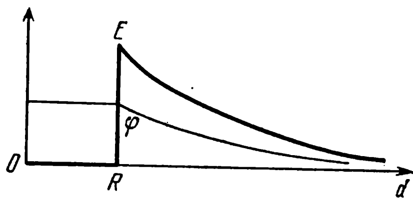


Рис. 215.

72. Поле внутри сферы равно нулю, а поэтому потенциал φ имеет постоянное значение и равен значению потенциала самой сферы, т. е. $\varphi=4\pi R\sigma$, а вне сферы потенциал равен $\varphi=4\pi R^2\sigma/d$

(тонкая линия на рис. 215). E внутри сферы равно нулю, а вне сферы $E=4\pi R^2\sigma/d^2$ (жирная линия на рис. 215).

73. $v_{\text{макс}}=\left(\dfrac{qQ}{4\pi mR}\right)^{1/2}$.

Рис. 216.

74. Поле будет иметь вид, показанный на рис. 216. Потенциал внешнего шара Q/R_3, а потенциал внутреннего $Q\left(\dfrac{1}{R_1}-\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}\right)$. Если внешний шар заземлить, то его потенциал будет равен нулю, а потенциал внутреннего шара $Q\,(R_2-R_1)/(R_1R_2)$.

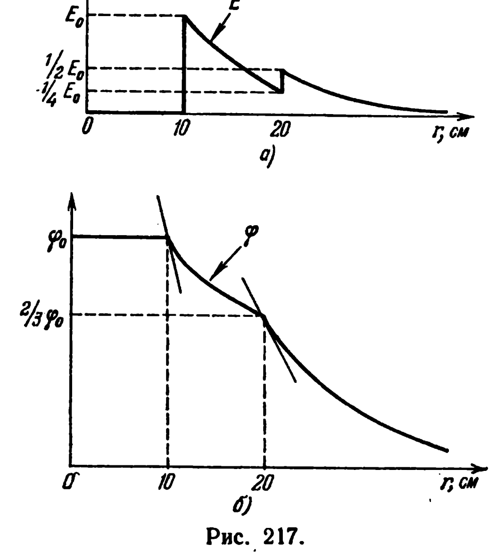


Рис. 217.

75. См. рис. 217, *а* и *б*. $E_0=0{,}1$ СГСЭ, $\varphi_0=1{,}5$ СГСЭ $=450$ В.

76. Часть силовых линий, идущих от заряда $+2q$, будет оканчиваться на внутренней стороне замкнутой оболочки, значит, потенциал ее будет ниже потенциала проводника, имеющего заряд $+2q$.

77. Заряд противоположного знака, равный половине заряда пузыря (см. задачу 69).

78. Решение. На единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $f = Q^2 n/(8\pi R^2)$. Отсюда интегрированием легко получить $F = Q^2/(8R^2)$.

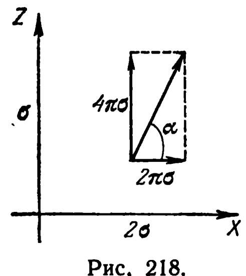


Рис. 218.

79. $F = Q(Q+2q)/(8R^2)$.

80. $F = \varkappa^2/(\pi R)$.

81. $F = \varkappa(\varkappa + 2\varkappa_0)/(\pi R)$.

82. $E = 2\sqrt{5}\pi\sigma$ (рис. 218).

83. Эквипотенциальные поверхности поля — плоскости, наклоненные к заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ под углом α, определяемым соотношением $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Потенциал φ линейно изменяется с расстоянием от линии пересечения поверхностей. Для поверхности с плотностью заряда 2σ: $\varphi = -2\pi\sigma x + c$. Для поверхности с плотностью заряда σ: $\varphi = -4\pi\sigma z + c$.

84. $\sigma = 0{,}00265$ СГСЭ.

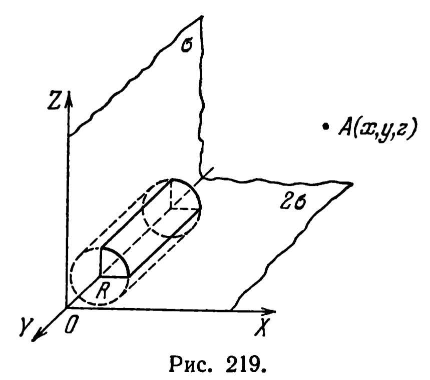


Рис. 219.

85. Электрическое поле радиально и определяется выражениями

$$E = \begin{cases} 0, & \text{если } r < R_1 \text{ или } R_3 < r < \infty, \\ \dfrac{R_1(R_2 - R_3)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, & \text{если } R_1 < r < R_2, \\ \dfrac{R_3(R_2 - R_1)}{R_2(R_3 - R_1)} \dfrac{Q}{r^2}, & \text{если } R_2 < r < R_3, \\ 0, & \text{если } r > R_3, \end{cases}$$

где r — расстояние от центра сфер.

86. $R = 1$ м.

87. Внутри цилиндра поле такое же, как и в задаче 82. Вне цилиндра, если ось его направить по оси Y, первую заряженную плоскость совместить с координатной плоскостью YOZ, а вторую — с координатной плоскостью XOY (рис. 219), компоненты напряженности поля в произвольной точке $A(x, y, z)$ будут

$$2\pi\sigma\left[1-\frac{6Rx}{(x^2+z^2)}\right] \quad \text{по оси } X,$$

$$0 \quad \text{по оси } Y,$$

$$2\pi\sigma\left[2-\frac{6Rz}{(x^2+z^2)}\right] \quad \text{по оси } Z.$$

88. Если начало координат взять в центре сферы и ось Z направить перпендикулярно к плоскости (рис. 220), то компоненты

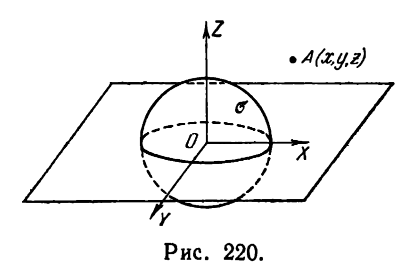


Рис. 220.

напряженности поля в точке $A(x, y, z)$, лежащей вне сферы, будут

$$\frac{4\pi R^2\sigma x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{по оси } X,$$

$$\frac{4\pi R^2\sigma y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{по оси } Y,$$

$$2\pi\sigma\left[1+\frac{2R^2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right] \quad \text{по оси } Z.$$

В точке, лежащей внутри сферы, поле направлено вдоль оси Z и равно $2\pi\sigma$.

89. $\rho=1{,}3\cdot10^{-3}$ СГСЭ.

90. $\sigma_1=-\sigma_2=\frac{1}{2}(q_1-q_2)$, $\sigma_1'=\sigma_2'=\frac{1}{2}(q_1+q_2)$; $E=2\pi(q_1-q_2)$, $E'=2\pi(q_1+q_2)$.

91. 1) По 40 В. 2) Нуль между пластинками *1* и *2* и 40 В между пластинками *2* и *3*.

92. 40 В.

93. $E_1=Vx/d^2$; $E_2=V(x+d)/d^2$.

94. Напряженность поля в направлении из точки *1* в точку *2* равна $E_{12}=(\varphi_1-\varphi_2)/a$, где a — длина ребра кубика. Аналогично, $E_{13}=$

$=(\varphi_1-\varphi_3)/a$ и $E_{14}=(\varphi_1-\varphi_4)/a$. Векторная сумма E_{12}, E_{13}, E_{14} определит приближенно напряженность поля в окрестности точек *1*, *2*, *3*, *4*.

95. $V_{12}\approx 0{,}25$ СГСЭ; $V_{23}\approx 0{,}75$ СГСЭ.

96. Уменьшится в два раза.

97. Решение. Потенциалы проводников являются линейными однородными функциями их зарядов: $\varphi_i=\sum\limits_k A_{ik}q_k$. В силу симметрии все коэффициенты A_{ik} с одинаковыми индексами равны между собой. Точно так же равны все коэффициенты с разными индексами. Обозначая эти коэффициенты через A и B соответственно, можем написать $\varphi_1=Aq_1+B(q_2+q_3)$ и аналогично для остальных проводников. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1=Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1=Aq_2+Bq_1$. Аналогично, для третьего шара $\varphi_1=Aq_3+B(q_1+q_2)$. Таким образом, $Aq_1=Aq_2+Bq_1=Aq_3+B(q_1+q_2)$. Отсюда $q_3=q_2^2/q_1$.

98. $q_3=q_2^2/q_1$; $q_4=q_2^3/q_1^2$.

99. $V\approx 189$ В.

100. На расстоянии d (в сантиметрах) от общей оси цилиндров $E\approx 39/d$ СГСЭ.

102. $A=pq/d^2$.

103. Нет, так как такое поле не будет потенциальным. Действительно, работа при передвижении заряда по прямоугольному замкнутому контуру, две стороны которого параллельны полю, а две перпендикулярны к нему (рис. 221), будет отлична от нуля.

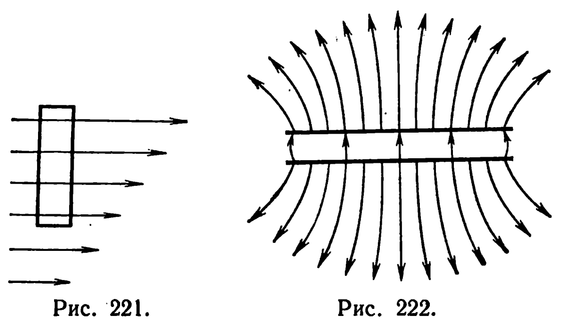


Рис. 221. Рис. 222.

104. Потенциал проводника уменьшится.

105. Уменьшится.

106. $V=2\pi qd/S$.

107. См. рис. 222. $E=6\pi q/S$.

108. $V = Q(R_2 - R_1)/(R_1R_2) = 750$ В. Напряженность поля внутри первой сферы равна нулю, между сферами Q/r^2, вне второй сферы $2Q/r^2$, где r — расстояние рассматриваемой точки от центра сфер.

109. 1) $\varphi = 9\cdot 10^8$ В. 2) Заряд не удержится, так как напряженность поля у поверхности шара будет $E = 90$ кВ/мм.

110. $E = 2\pi\sigma\left(\frac{h+d}{\sqrt{(h+d)^2+R^2}} - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)$, см. задачу 19. Если $d \ll h$, то $E \approx \frac{2\pi\sigma R^2 d}{(h^2+R^2)^{3/2}}$.

111. $Q \approx 265$ СГСЭ.

112. Увеличится в полтора раза.

113. Увеличится на 200 пФ. Положение листа на результат не влияет в том случае, когда он остается параллельным обкладкам.

114. $C = 35$ см.

115. Решение. Поле большого шара в его полости однородно и равно $4\pi\rho\boldsymbol{r}/(3\varepsilon)$, где $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OC}$ — вектор, проведенный от центра большого шара O к центру малого шара C. Умножив это поле на заряд малого шара, найдем $F = (4\pi\rho)^2 R^3 r/(9\varepsilon)$.

116. $C = R/2$.

Указание. Если $R \ll d$, где d — расстояние между шарами, то емкость одного шара относительно плоскости симметрии приближенно равна R. Поэтому емкость между шарами можно рассматривать как емкость двух конденсаторов, включенных последовательно.

117. $C = \frac{C_{\text{а-с}}C_{\text{а-к}} + C_{\text{а-с}}C_{\text{с-к}} + C_{\text{с-к}}C_{\text{а-к}}}{C_{\text{с-к}} + C_{\text{а-с}}}$.

118. $C_{\text{а-к}} = \frac{C_1 - C_2 + C_3}{2}$, $C_{\text{а-с}} = \frac{-C_1 + C_2 + C_3}{2}$, $C_{\text{с-к}} = \frac{C_1 + C_2 - C_3}{2}$.

119. 1) Емкость батареи, включенной по схеме *а*), больше. 2) $C_4 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$, C_3 может быть любой.

120. Для цилиндрического конденсатора $C = \frac{l}{2\ln(R_2/R_1)}$. Если $R_2 = R_1 + \Delta R$, то $\ln(R_2/R_1) = \ln(1 + \Delta R/R_1) \approx \Delta R/R_1$. Тогда $C = \frac{lR_1}{2\Delta R} = \frac{2\pi R_1 l}{2\pi\Delta R} = \frac{S}{4\pi\Delta R}$, где S — боковая поверхность цилиндра. Для сферического конденсатора доказательство аналогичное.

121. $lr = \text{const}$, где l — длина трубки, r — ее радиус. Конденсаторные клеммы применяются для более равномерного падения потенциала в изоляции, а следовательно, и уменьшения максимального значения напряженности поля в изоляторе. Если изолирующая трубка будет иметь толщину порядка радиуса провода, то напряженность у провода будет примерно в два раза больше, чем у поверхности

трубки, а в конденсаторной клемме с очень тонкими слоями напряженность будет всюду почти одинаковой.

122. Увеличится примерно вдвое.

123. Увеличится примерно в три раза по сравнению с емкостью конденсатора без коробки.

124. $V_1=\frac{\mathscr{E}C_2}{C_1+C_2}$ и $V_2=\frac{\mathscr{E}C_1}{C_1+C_2}$, где V_1 — напряжение на конденсаторе C_1 и V_2 — на конденсаторе C_2.

125. $V_1=3$ В; $V_2=1{,}5$ В; $V_3=3$ В; $V_4=1{,}5$ В.

126. $V_1=3{,}6$ В; $V_2=1{,}8$ В; $V_3=3{,}6$ В; $V_4=1{,}8$ В.

127. $V_1=\frac{C_1\mathscr{E}_1+C_2\mathscr{E}_2}{C_1+C_2}$; $V_2=\frac{C_1(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)}{C_1+C_2}$.

Указание. Заряды на обкладках конденсаторов связаны равенством $Q_1-Q_2=C_1\mathscr{E}_1$, как это следует из закона сохранения заряда.

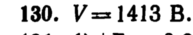
128. При последовательном. $V=1125$ В; $C=0{,}8$ мкФ.

129. Его электроемкость должна быть значительно меньше электроемкости проводника, чтобы при присоединении электроскопа потенциал проводника не менялся.

130. $V=1413$ В.

131. 1) $E_1=6{,}28$ СГСЭ; 2) $E_2=3{,}14$ СГСЭ; 3) сила отталкивания $F=12{,}6$ дин.

132. Пользуясь значениями V_1, V_2 и C_0, определяем электроемкость относительно земли заряженного тела и электрометра (рис. 223). Эта электроемкость выражается так: $C_x=C_0\frac{V_2}{V_1-V_2}$. Заряд равен $Q=C_xV_1$. Точность определения заряда зависит от точности определения величин V_1 и V_2 и, кроме того, от разности V_1-V_2. Чем больше V_1-V_2, тем точнее определение заряда.



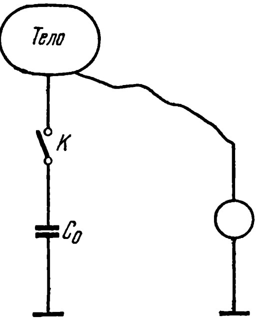


Рис. 223.

133. $V=17{,}25$ кВ.

134. $C=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{4\pi[h(\varepsilon_2-\varepsilon_1)+d\varepsilon_1]}$.

135. В воздушном зазоре $E=D=4\pi h\mathscr{P}/d$. Внутри пластинки $E=-4\pi(d-h)\mathscr{P}/d$, $D=4\pi h\mathscr{P}/d$.

136. 1) $C_1=\frac{S}{2\pi d(1/\varepsilon_1+1/\varepsilon_2)}$; 2) $C_2=\frac{S(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{8\pi d}$. $C_2>C_1$, так как $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2$ всегда больше $2\varepsilon_1\varepsilon_2$.

137. $C=\frac{S\varepsilon_1\varepsilon_2}{4\pi nd(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$.

138. $C=\frac{S(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{4\pi d\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}$.

Указание. Так как диэлектрическая проницаемость между обкладками меняется по закону $\varepsilon=\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x$, где x — расстояние от первой пластины, то разность потенциалов между обкладками можно записать так:

$$V=\int_0^d E\,dx=Dd\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x},$$

где E — напряженность поля, $D=4\pi\sigma$ — электрическая индукция.

139. Увеличится на $V(\varepsilon-1)/(4\pi d)$.

140. $E=\frac{\varepsilon V}{(d-h)\varepsilon+h}\approx 1750$ В/см.

141. $C=\frac{(\varepsilon+1)R_1R_2}{2(R_2-R_1)}=120$ см.

142. $E=\frac{4\pi Q}{\varepsilon_1\Omega_1+\varepsilon_2\Omega_2}\frac{1}{r^2}$, где r — расстояние от центра шара. $C=\frac{\Omega_1\varepsilon_1+\Omega_2\varepsilon_2}{4\pi}\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$.

143. $E=\frac{4\pi}{\varepsilon_1\varphi_1+\varepsilon_2\varphi_2}\frac{Q}{lr}$, где r — расстояние от оси конденсатора. $C=\frac{\varphi_1\varepsilon_1+\varphi_2\varepsilon_2}{4\pi\ln(R_2/R_1)}l$.

144. В точке на расстоянии r от центра шара ($R_1<r<R_2$) напряженность $E=1000/r^2$ СГСЭ.

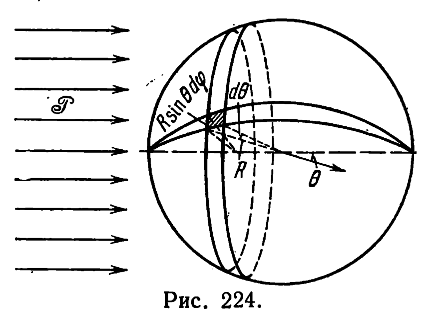


Рис. 224.

145. $E'=(\varepsilon-1)E/3$. Если поляризованность диэлектрической среды $\mathscr{P}$, то $(\varepsilon-1)E=4\pi\mathscr{P}$. Напряженность поля в центре сферической полости $E'=4\pi\mathscr{P}/3$. В самом деле (рис. 224),

$$E'=\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}\frac{\mathscr{P}\cos\theta\cdot R^2\sin\theta\,d\varphi}{R^2}\cos\theta=2\pi\mathscr{P}\int_0^\pi\sin\theta\cos^2\theta\,d\theta=\frac{4\pi}{3}\mathscr{P}.$$

146. Образующуюся при заземлении внутренней сферы систему можно рассматривать как параллельно соединенные сферический

конденсатор и внешнюю сферу, имеющую емкость R_2 относительно бесконечно удаленной сферы.

147. $E = V/(d \ln 2)$.

148. Не изменится.

149. $\rho = -\varphi_0/(2\pi d^2)$.

Решение. Если x — расстояние от пластины с потенциалом φ_0, то напряженность поля по теореме Гаусса определяется уравнением $\partial E/\partial x = 4\pi\rho$. Так как потенциал φ связан с напряженностью поля E равенством $E = -d\varphi/dx$, то $d^2\varphi/dx^2 = -4\pi\rho$. Общее решение последнего уравнения

$$\varphi = -2\pi\rho x^2 + Cx + C_1.$$

Учитывая условия задачи, находим константы C и C_1 и ответ.

150. В точке на расстоянии r от оси цилиндров потенциал

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + \pi\rho\,(R_2^2 - R_1^2)}{\ln(R_2/R_1)} \ln(r/R_1) - \pi\rho\,(r^2 - R_1^2).$$

Решение. По теореме Гаусса для кольцевого слоя радиуса r толщины dr

$$E\,2\pi r - \left(E - \frac{dE}{dr}\,dr\right) 2\pi\,(r - dr) = 4\pi\rho\,2\pi r\,dr,$$

где E — напряженность поля. Отсюда $\dfrac{dE}{dr} + \dfrac{1}{r}E = 4\pi\rho$, или для потенциала

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = -4\pi\rho.$$

Частное решение этого уравнения $\varphi_1 = -\pi\rho r^2$. Решение соответствующего однородного уравнения $\dfrac{d^2\varphi}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d\varphi}{dr} = 0$ имеет вид $\varphi_2 = C \ln r + C_1$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C \ln r + C_1 - \pi\rho r^2.$$

Подставляя сюда заданные в условии задачи значения потенциала, находим C и C_1 и получаем ответ.

151. Только растягивающие, нормальные к пластинке.

153. Сила притяжения не изменится.

154. $h = \dfrac{\varepsilon_1 - 1}{8\pi\tau g}\left(\dfrac{V\varepsilon_2}{\varepsilon_1 l_2 + \varepsilon_2 l_1}\right)^2$.

155. $F = \dfrac{S}{8\pi}\left(\dfrac{V\varepsilon}{l_1\varepsilon + l_2}\right)^2$.

156. $h = \dfrac{V^2(\varepsilon - 1)}{\pi\tau g\,(D_1^2 - D_2^2)\ln(D_1/D_2)} \approx 5$ мм.

157. $A = \dfrac{2\pi q^2}{S}(d_0 - d)$. За счет энергии электрического поля конденсатора.

158. $W = q^2/(2R)$.

159. $W = 3q^2/(5R)$.

160. $M = (\varepsilon - 1) R^2V^2/(16\pi d)$. Момент сил M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

162. $\rho = E/(2\pi r)$.

163. $\sigma = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \vartheta$. Вне сферы — поле точечного диполя с дипольным моментом $p = R^3E$.

164. Потребляемая мощность меняется обратно пропорционально квадрату расстояния: $\frac{dW}{dt} = \frac{SV^2}{8\pi x^2} \frac{dx}{dt}$, где S — площадь пластин конденсатора, x — расстояние между ними, V — разность потенциалов и t — время.

При раздвижении пластин затрачивается механическая работа и уменьшается электрическая энергия конденсатора, так как она равна $CV^2/2$, а C уменьшается. Но при этом заряды стекают с пластин конденсатора, т. е. движутся против э.д.с. батареи. На продвижение этих зарядов и идет механическая работа и освободившаяся энергия конденсатора. Таким образом, в этом случае как механическая, так и электростатическая энергии или переходят в химическую энергию батареи, или расходуются на нагревание ее.

165. 1) $C = \frac{(1+\varepsilon) S}{8\pi d}$. 2) $E = \frac{2V}{d(1+\varepsilon)}$; напряженность поля одинакова в воздухе и в жидкости. 3) В воздухе $\sigma = \frac{V}{2\pi d(1+\varepsilon)}$; в жидкости $\sigma' = \frac{\varepsilon V}{2\pi d(1+\varepsilon)}$. 4) $\Delta W = \frac{SV^2}{8\pi d} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$. За счет энергии ΔW совершена работа при подъеме жидкости между пластинами конденсатора. Уровень жидкости между пластинами будет выше, чем в сосуде.

166. Изменение энергии конденсатора: 1) $\Delta W_1 = \frac{(1-\varepsilon) CV^2}{2} \approx$ ≈ -318 эрг; 2) $\Delta W_2 = \frac{(\varepsilon - 1) Q^2}{2C\varepsilon} \approx +1590$ эрг. Работа, совершаемая при удалении стеклянной пластины: $A_1 = +318$ эрг; $A_2 = +1590$ эрг.

Решение. В обоих случаях не только изменяется энергия конденсатора, но и затрачивается работа на удаление пластины. Эта работа во втором случае больше, так как по мере выдвигания пластины напряженность поля в конденсаторе увеличивается, в то время как в первом случае она остается неизменной. В первом случае при удалении пластины из конденсатора не только совершается механическая работа, но уменьшается энергия конденсатора и увеличивается энергия батареи (см. задачу 164). Работа, совершенная против э.д.с. батареи, $A = \Delta Q \cdot V$, где ΔQ — изменение заряда конденсатора после удаления пластины. Так как $\Delta Q = (\varepsilon - 1) CV$, то $A = (\varepsilon - 1) CV^2$ и при

удалении пластины совершается механическая работа $A_1 = A + \Delta W_1 = (\varepsilon - 1) CV^2/2 = +318$ эрг. Во втором случае при удалении пластины совершается механическая работа, равная увеличению энергии конденсатора: $A_2 = \Delta W_2 = +1590$ эрг.

167. $M = \dfrac{nR^2V^2}{16\pi d} \approx 510$ дин·см.

Решение. При повороте подвижных пластин конденсатора на угол $\Delta\vartheta$ заряд на них увеличится на ΔQ. Источник э.д.с. совершит работу $V\Delta Q$. Эта работа пойдет на увеличение электростатической энергии конденсатора $\Delta QV/2$ и на работу сил притяжения $M\Delta\vartheta$. Поэтому $V\Delta Q = M\Delta\vartheta + \Delta QV/2$, или

$$M\Delta\vartheta = \frac{\Delta QV}{2}. \tag{167.1}$$

Увеличение заряда $\Delta Q = \Delta CV$, а изменение емкости $\Delta C = nR^2\Delta\vartheta/(8\pi d)$. Подставляя эти выражения в (167.1) и сокращая на $\Delta\vartheta$, получаем ответ.

168. $\alpha \approx 6{,}5 \cdot 10^{-8}$ СГСЭ.

169. Решение. Искомая зависимость находится в точности так же, как и зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости (формула Томсона). Надо только учесть влияние электрического поля на высоту поднятия жидкости в капилляре. Электрическое поле должно быть перпендикулярно к поверхности мениска жидкости в капилляре. Влияние такого поля эквивалентно уменьшению поверхностного натяжения жидкости σ. Из капиллярного давления $2\sigma/r$ надо вычесть максвелловское натяжение

$$\frac{D^2}{8\pi}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{q^2}{8\pi r^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

где D — электрическая индукция, ε — диэлектрическая проницаемость капли, а r — ее радиус. Для проводящей капли в этой формуле следует положить $\varepsilon = \infty$. То же можно делать для воды ввиду большого значения диэлектрической проницаемости последней ($\varepsilon = 81$). В результате вместо формулы Томсона получится

$$\ln\frac{P_0}{P} = \frac{\mu v_ж}{RT}\left(P_0 - P - \frac{2\sigma}{r} + \frac{q^2}{8\pi r^4}\right). \tag{169.1}$$

При $r = 0$ и $r = \infty$ эта формула дает соответственно $P = 0$ и $P = P_0$. В промежутке между этими значениями упругость насыщенного пара P достигает максимума. Дифференцируя (169.1) по r и полагая $dP/dr = 0$, находим, что это происходит при

$$r = r_0 \equiv \sqrt[3]{q^2/(4\pi\sigma_0)}. \tag{169.2}$$

Применим полученные результаты для капли воды, полагая q равным элементарному заряду e, находящемуся в центре капли. При

20 °C для воды $\sigma = 73$ дин/см. По формуле (169.2) находим $r_0 = 6{,}3 \times \times 10^{-8}$ см. При таких малых размерах капель макроскопические формулы, как точные количественные соотношения, становятся сомнительными. Тем не менее мы воспользуемся ими, рассчитывая, что грубо качественно результаты получатся правильными. Мы не будем также смущаться тем обстоятельством, что в реальных условиях осаждающиеся ионы не попадают в центр капли, а могут находиться в ней в любом месте. Зависимость упругости насыщенного пара над заряженной каплей от ее радиуса представлена на рис. 225. Та же зависимость для незаряженной капли представляется пунктирной кривой. Заряд капли уменьшает упругость насыщенного пара, причем при $r < r_0$ упругость пара растет с увеличением радиуса капли. Этим и объясняется конденсация пара на ионах.

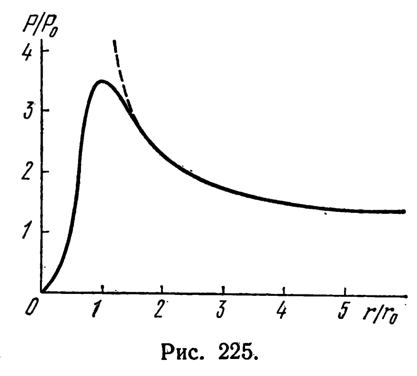


Рис. 225.

170. Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рис. 37 (ось Z перпендикулярна к плоскости рисунка и параллельна длинным сторонам пластин). Искомое поле потенциально и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

На проводнике AC (т. е. при $y=0$) потенциал должен обращаться в постоянную, которую мы примем равной нулю. Искомое решение будет $\varphi = \alpha xy + \beta y$, где α и β — постоянные. В силу симметрии потенциал φ не должен меняться при замене y на $-y$, а потому $\beta = 0$. Для напряженности поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

Постоянная α найдется по разности потенциалов между точками A и B (или между точками C и D). Потенциалы точек B и C равны соответственно $\varphi_B = +V/2$, $\varphi_C = -V/2$. Напряженность поля E_y на поверхности пластины AB (т. е. при $x = -d/2$) будет $E_y = -V/(2h) = \alpha d/2$, откуда $\alpha = -V/(hd)$. Окончательно

$$E_x = Vy/(hd), \quad E_y = Vx/(hd).$$

Уравнение силовой линии $dx/E_x = dy/E_y$ имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

откуда $y^2 - x^2 = C$, т. е. силовыми линиями являются равносторонние гиперболы. При $C > 0$ оси гипербол совпадают с осью Y, при $C < 0$ — с осью X. Для выяснения смысла постоянной C обозначим через a расстояние от вершины гиперболы до начала координат. При $C > 0$ координатами вершины гиперболы будут $(0, a)$. Они должны удовлетворять уравнению $a^2 - 0^2 = C$, откуда $C = a^2$. Аналогично, для второго случая $(C < 0)$ $C = -a^2$. Таким образом, получаются два семейства гипербол:

$$y^2 - x^2 = a^2 \quad \text{и} \quad x^2 - y^2 = a^2,$$

асимптотами которых являются биссектрисы соответствующих координатных углов (рис. 226). Гиперболические силовые линии первого семейства легко воспроизводятся экспериментально обычным демонстрационным методом. Силовые линии второго семейства экспериментально получить трудно из-за малости составляющей поля E_x.

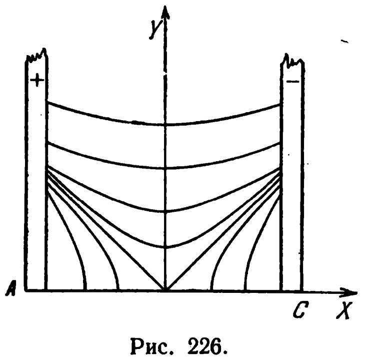


Рис. 226.

171. $q = \frac{l}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 78$ СГСЭ $= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

172. $\sigma = \frac{V}{4\pi} \frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}$.

173. Решение. Работа, которую надо совершить над диэлектриком, чтобы квазистатически увеличить его индукцию на dD, определяется выражением $\delta A = \frac{1}{4\pi} E\,dD$. Подставляя это выражение в термодинамическое соотношение $dU = T\,dS + \delta A$, получим

$$dU = T\,dS + \frac{1}{4\pi} E\,dD.$$

Отсюда легко получаются все остальные соотношения.

174. Решение. При $T = \text{const}$ $d\Psi = \frac{1}{4\pi} E\,dD$, или, в силу соотношения $D = \varepsilon E$, $d\Psi = \frac{\varepsilon}{4\pi} E\,dE$. Отсюда

$$\Psi = \frac{\varepsilon}{8\pi} E^2 + \Psi_0 = \frac{1}{8\pi} ED + \Psi_0,$$

где Ψ зависит только от температуры и плотности диэлектрика, но не зависит от напряженности электрического поля.

175. Решение.

$$U=\Psi+TS=\Psi-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_D=$$
$$=\frac{D^2}{8\pi\varepsilon}-\frac{D^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+U_0=\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon+T\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)+U_0.$$

Производная $\partial\varepsilon/\partial T$ должна вычисляться при постоянной плотности диэлектрика. Величина U_0 зависит только от температуры и плотности диэлектрика.

176. Результат следует из независимости ε от температуры для таких диэлектриков.

177. Решение. Для таких диэлектриков $\varepsilon-1\sim 1/T$. Отсюда следует

$$\Psi=\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2,\qquad U=\frac{1}{8\pi}E^2.$$

178. $C_D-C_E=\frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_D\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E=-\frac{T}{4\pi}\frac{E^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^2$. Надо нагревать диэлектрик в плоском конденсаторе. Если конденсатор отсоединен от источника напряжения, то $D=\text{const}$. Если же он присоединен к источнику, поддерживающему разность потенциалов между обкладками неизменной, то $E=\text{const}$.

179. Решение. При квазистатическом адиабатическом процессе энтропия диэлектрика S остается постоянной. Рассматривая ее как функцию E и T (плотность диэлектрика поддерживается постоянной), можно написать для бесконечно малого процесса

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E\Delta T+\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T\Delta E=0.$$

Подставив сюда

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E=\frac{C_E}{T},\quad \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E=\frac{E}{4\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T},$$

где C_E — теплоемкость единицы объема диэлектрика при постоянной напряженности электрического поля E, получим

$$dT=-\frac{TE}{4\pi C_E}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}dE.$$

Изменение T для конечных квазистатических адиабатических процессов можно найти отсюда интегрированием по E.

Аналогично, рассматривая S как функцию D и T, можно получить

$$dT=-\frac{TE}{4\pi\varepsilon C_D}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}dD.$$

180. Решение. Для газов с полярными молекулами при постоянной плотности $(\varepsilon-1)T=\text{const}$. Отсюда $\partial\varepsilon/\partial T=-(\varepsilon-1)/T$, и, следовательно,

$$dT=\frac{E(\varepsilon-1)}{4\pi C_E}\,dE.$$

Пренебрегая зависимостью C_E и ε от температуры и интегрируя от E до 0, получим

$$T_2-T_1=-\frac{\varepsilon-1}{8\pi C_E}E^2.$$

Пренебрежем зависимостью C_E от напряженности электрического поля. Тогда C_E будет теплоемкостью единицы объема газа при постоянном значении этого объема. Выразим ее через молярную теплоемкость $C_V^{\text{мол}}$ по формуле

$$C_E=\frac{C_V^{\text{мол}}P}{RT},$$

где $P=nkT$ — давление газа. Используя известные формулы $C_V^{\text{мол}}=$ $=R/(\gamma-1)$, $(\varepsilon-1)/4\pi=np^2/(3kT)$, найдем

$$T_2-T_1=-\frac{(\gamma-1)\,p^2}{6k^2T}E^2\approx 3\cdot10^{-4}\,\text{К}.$$

Таким образом, при адиабатическом выключении электрического поля диэлектрик охлаждается.

181. Решение. Из формулы $d\Phi=-S\,dT-\frac{1}{4\pi}D\,dE$ получаем

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E=\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T.$$

Правая часть этого равенства при $T=0$ обращается в нуль в силу теоремы Нернста. Кроме того,

$$\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E=\left(\frac{\partial(\varepsilon E)}{\partial T}\right)_E=E\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}.$$

Индекс E у производной $\partial\varepsilon/\partial T$ опущен, так как ε от E не зависит. Отсюда и получается требуемый результат.

182. Решение. Пусть внешнее электрическое поле направлено вдоль оси X и в направлении осей X и Y действуют механические напряжения τ_x и τ_y. Если $V=lbh$ — объем пластинки, то элементарная работа, которую надо затратить на ее поляризацию при квазистатическом процессе, будет $VE\,dP=VE_x dP_x$. Элементарная работа сил натяжения равна $bl\tau_x\,dh+hb\tau_y\,dl$. Из термодинамического соотношения $dU=T\,dS+\delta A$ после деления на объем V получим

$$du=T\,ds+E_x\,dP_x+\tau_x\frac{dh}{h}+\tau_y\frac{dl}{l},$$

где u и s — удельные значения внутренней энергии и энтропии. Перепишем это соотношение так:

$$du = T\,ds + E_x\,dP_x + \tau_x\,d\ln h + \tau_y\,d\ln l,$$

и введем функцию $g = u - Ts - E_xP_x - \tau_x \ln h - \tau_y \ln l$. Тогда

$$dg = -s\,dT - P_x\,dE_x - \ln h\cdot d\tau_x - \ln l\cdot d\tau_y.$$

Так как dg — полный дифференциал, то

$$\left(\frac{\partial P_x}{\partial \tau_x}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln h}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial h}{\partial E_x}\right)_T,$$

$$\left(\frac{\partial P_y}{\partial \tau_y}\right)_T = \left(\frac{\partial \ln l}{\partial E_x}\right)_T = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial E_x}\right)_T.$$

Если есть прямой эффект, то производные слева отличны от нуля. Значит, $(\partial h/\partial E_x)_T \neq 0$, $(\partial l/\partial E_x)_T \neq 0$, откуда и следует существование обратного эффекта. Второе утверждение доказывается так же. Доказательство проведено для изотермических процессов. Но его легко распространить и на адиабатические процессы.

§ 2. Законы постоянного тока

183. $R = 0{,}17$ Ом.
184. $N \approx 39{,}5$ Вт.
185. $T = 2200$ °С.
186. $R \approx 14{,}4$ Ом; $\alpha = 4{,}5\cdot 10^{-3}$ °С$^{-1}$.
187. $D \approx 5{,}6$ мм.
188. $\dfrac{dT}{dt} = 0{,}24\dfrac{V^2}{\rho\,(4l/\pi D^2)\,mc} = 0{,}0079$ °С/с.
189. $V_1 = {}^{72}/_{11}$ В; $V_2 = {}^{36}/_{11}$ В; $V_3 = {}^{24}/_{11}$ В.
190. $R = {}^{5}/_{11}\,r$.
191. См. рис. 227. $I = \mathcal{E}/(R+r)$; $\operatorname{tg}\alpha = R^2/\mathcal{E}$.

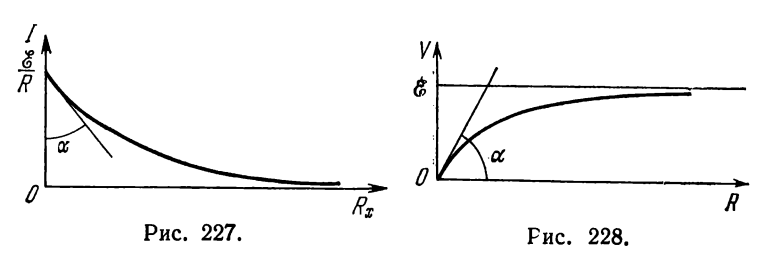


Рис. 227. Рис. 228.

192. См. рис. 228. $V = \mathcal{E}R/(R+r)$; $\operatorname{tg}\alpha = \mathcal{E}/r$.
193. $\mathcal{E} \approx 34{,}3$ В; $r \approx 1{,}43$ Ом.
194. $r_{3\text{В}} = 1000$ Ом; $r_{15\text{В}} = 5000$ Ом; $r_{150\text{В}} = 50\,000$ Ом.

195. $\frac{\Delta R_x}{\Delta I}=-\frac{(r_1+r_2+R_x)^2}{\mathscr{E}}$, т. е. точность измерения тем меньше, чем больше R_x. Эта формула определяет точность измерения сопротивления обычными омметрами.

196. 1) Сопротивление шунта $r_ш \approx 8{,}1$ кОм вычисляется по формуле $\frac{1}{r_ш}=\frac{1}{a}\left(\frac{\mathscr{E}}{V}-b\right)-\frac{1}{r}$, где $V=0{,}125$ В — падение напряжения на измерительном приборе, $b=1+R_1/R_2$, $a=bR_0+R_1$.

2) $\mathscr{E} \approx 1{,}28$ В; эту величину можно определить по формуле, указанной в п. 1), при $r_ш=22$ кОм.

3) $R_x \approx 25\left(\frac{100}{n}-1\right)$ Ом. Более общее соотношение: $R_x=(R_1+R)\left(\frac{100}{n}-1\right)$, $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_0+r_0}$ и $\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r}+\frac{1}{r_ш}$. Сравнение шкал измерительного прибора и омметра дано на рис. 229.

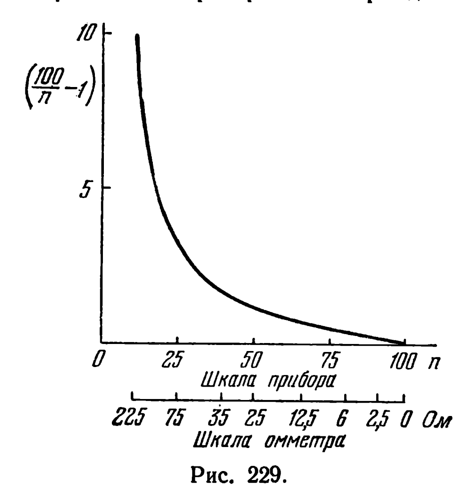


Рис. 229.

4) $\Delta R_x \approx 1250/n^2$ Ом — ошибка в определении сопротивления R_x, соответствующая ошибке в полделения шкалы измерительного прибора в том случае, когда стрелка прибора показывает n делений. Минимальная ошибка: при $n=100$ $\Delta R_x \approx 0{,}125$ Ом; при $n=5$ $\Delta R_x \approx 50$ Ом.

5) $R_1=10$ Ом; $R=240$ Ом (см. п. 3)); $R_2 \approx 325$ Ом.

197. $l_1/l_2=4$ (если струны сделаны из одного материала и температуры струн в рабочих условиях одинаковы).

198. $R_x=\frac{R_1[VR_2-I(rR_2+rR_3+R_1R_3)]}{VR_3+I(rR_2+rR_3+R_1R_3+R_2R_1+R_2R_3)}$.

199. $R={}^7/_5\, r$.

200. Относительная погрешность

$$\frac{\Delta R_x}{R_x}=\frac{(R_x+R_3)(R_1+R_2)}{R_2 R_x}\frac{\Delta V}{V},$$

где V — напряжение на мостике и ΔV — разность потенциалов на зажимах гальванометра при изменении R_x на $R_x+\Delta R_x$. В состоянии равновесия $R_x/R_3=R_1/R_2=b$, поэтому множитель при $\Delta V/V$ будет равен $(1+b)^2/b$; он имеет минимум при $b=1$.

201. Необходимое для равновесия мостика соотношение плеч в одном случае обеспечивает равновесие и в другом случае. Но чувствительность схемы мостика зависит от соотношений между сопротивлением плеч и внутренним сопротивлением гальванометра и источника тока. Поэтому чувствительность мостика может измениться (см., например, ответ предыдущей задачи).

202. См. рис. 230. Абсолютная погрешность $\Delta R_x=\frac{10^{-3}}{(1-u)^2}$ Ом, где $u=x/L$, x — расстояние ползунка A от левого края. Относитель-

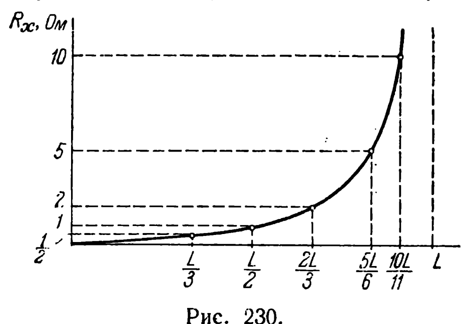


Рис. 230.

ная погрешность $\frac{\Delta R_x}{R_x}=\frac{10^{-3}}{u(1-u)}$; при $u=1/2$ она имеет минимум, равный $4\cdot10^{-3}$. Абсолютная погрешность растет до ∞ при $u\to1$, т. е. при увеличении измеряемого сопротивления.

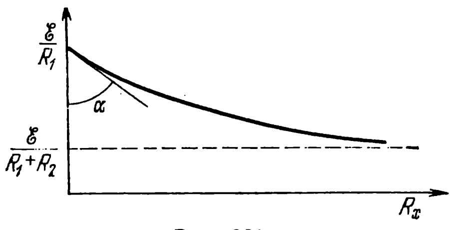


Рис. 231.

203. См. рис. 231. $I=\frac{\mathscr{E}(R_2+R_x)}{R_1R_2+(R_1+R_2)R_x}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\mathscr{E}}{R_1^2}$.

204. $r_ш = 16{,}7$ Ом.

205. $\mathscr{E} = \dfrac{R_2\mathscr{E}_1 + R_1\mathscr{E}_2}{R_1 + R_2}$.

206. $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3\left(1 + \dfrac{R_2}{R_3}\right)$, $\quad I_1 = \dfrac{\mathscr{E}_1}{R_1} - \dfrac{\mathscr{E}_3}{R_1}\left(1 + \dfrac{R_2}{R_3}\right)$.

207. $V = 1000$ В.

208. 1) $V \approx 2{,}93$ В; 2) $V = 2{,}4$ В.

209. $I = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \dfrac{\mathscr{E}}{h} vb$, где b — ширина пластины.

Решение. Заряд, приходящий на пластины за время dt:

$$dq = \sigma vb\, dt,$$

где

$$\sigma = \mathscr{P} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0\mathscr{E}_0 = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \frac{\mathscr{E}}{h}$$

— поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике. Отсюда

$$I = \frac{dq}{dt} = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \frac{\mathscr{E}}{h} vb.$$

210. $N = \mathscr{E}I = (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \dfrac{bv\mathscr{E}^2}{h}$, где v — мгновенная скорость диэлектрика, b — ширина пластин. Работа батареи расходуется на увеличение электрической энергии конденсатора и кинетической энергии диэлектрика поровну.

Решение.

$$N\, dt = \mathscr{E}\, dq = dW + \delta A, \qquad C = C_0 + (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \frac{b}{h} x,$$

$$dW = d\left(\frac{C\mathscr{E}^2}{2}\right) = \frac{\mathscr{E}^2}{2} dC, \quad \delta A = \frac{\mathscr{E}^2}{2} dC, \qquad dW = \delta A,$$

$$N\, dt = 2dW = 2\frac{\mathscr{E}^2}{2} dC = \mathscr{E}^2 (\varepsilon - 1)\,\varepsilon_0 \frac{b}{h} v\, dt.$$

211. Сопротивление цепи 1300 Ом, внутреннее сопротивление источника 325 Ом, сопротивление второго вольтметра 13 260 Ом.

212. Ток максимален, если $R = mr/n$, т. е. когда внешнее сопротивление цепи равно внутреннему сопротивлению батареи. Для соблюдения этого условия необходимо, чтобы $Nr \geqslant r$. Сила максимального тока $I_{макс} = m\mathscr{E}/(2R)$.

213. 1) $V = r_1 \dfrac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3}{r_1 + r_2 + r_3}$. 2) $V = 0$.

214. $I_1 \approx 1{,}05$ А (по направлению э. д. с.); $I_2 \approx 0{,}87$ А (против направления э. д. с.); $V \approx 1,\ 8$ В.

215. $I_0(r + R)$ в вольтах.

216. Для вольтметра необходимо дополнительное сопротивление 10^6 Ом. Для амперметра необходимо включить шунт сопротивлением $\approx 0{,}1$ Ом.

217. 1) $I=\frac{\mathscr{E}(R_1+R_2)}{rR_1+rR_2+R_1R_2}$; 2) $I_1=\frac{\mathscr{E}R_2}{rR_1+rR_2+R_1R_2}$;

3) $\frac{I_1^*}{I_1}=\frac{rR_1}{R_2(r+R_1)}+1$; если $r \ll R_1$, то $I_1^*/I_1=n+1$, где $n=r/R_2$.

218. Можно. Для этого нужно собрать схему, показанную на рис. 232, и взять сопротивления $R_2 \approx 12{,}2$ Ом и $R_1 \approx \frac{61x}{1+0{,}12x}$ Ом, где $x \leqslant 1$.

Рис. 232.

219. $I=0{,}75$ А. Вольтметр покажет нуль, так как падение напряжения внутри каждого элемента равно э. д. с. элемента.

220. 0,75 В (при условии, что сопротивление вольтметра достаточно велико).

221. Нуль (см. ответ задачи 219).

222. $\frac{\mathscr{E}_2}{r_2} < \frac{\mathscr{E}_1}{r_1+R}$.

223. Либо при $r \ll R$ и $r \ll R_x$, либо при $R_x \gg R$ (внутреннее сопротивление источника играет, очевидно, ту же роль, что и r).

224. $I=10$ мА.

225. $\mathscr{E}_2(R+R_1)=\mathscr{E}_1 R$.

226. $V_2=3$ В; $I_3=1$ А.

227. $R_2=3$ Ом; R_1 и R_4 — любые.

228. $V=\frac{\mathscr{E}}{1+\frac{(l-x)x}{l^2}\frac{R}{r}}\frac{x}{l}$, где x — расстояние ползунка от конца реохорда, к которому подключен вольтметр.

229. $\mathscr{E}=\frac{\mathscr{E}_1 r_2+\mathscr{E}_2 r_1}{r_2+r_1}$; $r=\frac{r_1 r_2}{r_2+r_1}$. Если $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, то $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E} > \mathscr{E}_2$ при $r_1 \neq 0$ и $r_2 \neq 0$.

230. $\mathscr{E}=\frac{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}{R_2}I_3$; $I_1=\frac{R_2+R_3}{R_2}I_3$; $I_2=\frac{R_3}{R_2}I_3$.

231. Э.д.с. $\mathscr{E}=\frac{I_4}{R_3R_5}[R_1(R_2R_5+R_3R_5+R_4R_5+R_2R_4+R_3R_4)+$
$+R_3(R_2R_4+R_2R_5+R_4R_5)]$.

232. $I_1=1{,}64$ А; $I_2=2{,}36$ А; $I_3=1{,}82$ А; $I_4=2{,}54$ А; $I_5=0{,}18$ А.

233. $\mathscr{E}=7{,}75$ В.

234. Решение. Допустим, что вначале ключ K был замкнут. Тогда

$$I_1+I_3+I_5=0,\quad I_2+I_4+I_5=0,$$
$$I_1R_1+I_2R_2-I_5R_5=\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_5,$$
$$I_3R_3+I_4R_4-I_5R_5=\mathscr{E}_3+\mathscr{E}_4-\mathscr{E}_5.$$

Если разомкнуть ключ K, то I_6 обратится в нуль, что приведет к изменению остальных токов. Однако ток I_5 по условию должен остаться неизменным. Обозначая новые значения токов штрихами, придем к прежней системе уравнений, в которой все штрихованные токи заменены нештрихованными, причем $I'_5=I_5$. Сравнивая эти две системы уравнений, получаем

$$I_1+I_3=I'_1+I'_3, \quad I_2+I_4=I'_2+I'_4,$$
$$I_1R_1+I_2R_2=I'_1R_1+I'_2R_2,$$
$$I_3R_3+I_4R_4=I'_3R_3+I'_4R_4.$$

Переписав эту систему уравнений в виде

$$R_1(I_1-I'_1)=R_2(I'_2-I_2),$$
$$R_3(I_3-I'_3)=R_4(I'_4-I_4),$$
$$I_1-I'_1=I'_3-I_3, \quad I_2-I'_2=I'_4-I_4,$$

почленным делением первых двух уравнений находим искомое условие:

$$R_1/R_3=R_2/R_4.$$

235. $R_2/R_6=R_5/R_3$. Для получения ответа не требуется новых вычислений, если заметить, что обе схемы топологически эквивалентны, т. е. одна может быть получена из другой непрерывной деформацией. В этом проще всего убедиться, если перейти к пространственной схеме мостика Уитстона, в которой провода изображаются ребрами правильного тетраэдра (рис. 233).

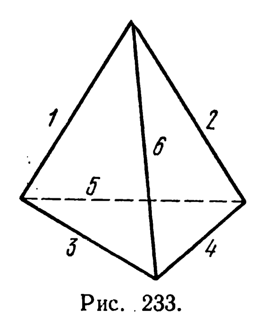


Рис. 233.

236. $R_1=\dfrac{V_{21}(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)}{R_2R_3I-V_{21}(R_2+R_3)}$.

237. $r=R_1-R_2$.

238. $C=\dfrac{R_2}{n[(R_1+R_2)(R_x-R_2)+R_1R_2]}\approx$ $\approx 0{,}0165$ мкФ.

239. Обозначая через l длину первого участка от источника э. д. с. до места заземления, L — длину всей линии, ρ — сопротивление единицы длины линии, r — сопротивление заземления, I_1 — ток через первый участок линии, I_2 — ток через приемный прибор, I_r — ток заземления, $\mathscr{E}$ — э. д. с. в начале линии, по законам Кирхгофа составляем уравнения

$$I_1=I_r+I_2, \quad \mathscr{E}=I_1l\rho+I_rr, \quad I_rr=(L-l)\rho I_2.$$

Отсюда

$$I_2=\frac{\mathscr{E}r}{rL\rho+\rho^2l(L-l)}.$$

Чтобы I_2 было минимально, нужно, чтобы $l(L-l)$ было максимально, а это будет, когда $l=L-l$, т. е. $l=L/2$.

240. См. рис. 234, где *Л*—лампа, *A*—один конец коридора, *B*—другой конец коридора.

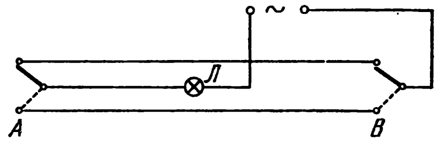


Рис. 234.

241. $R=\frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{r_2}{r_1}$.

Решение. Напряженность поля E и плотность тока j связаны условием $E=\rho j$. Если на единице длины цилиндра находится заряд σ, то напряженность поля около цилиндра $E=2\sigma/r$. Отсюда разность потенциалов между стенками цилиндра $V=2\sigma\ln(r_2/r_1)$. По определению сопротивление $R=V/I$, где I—ток, идущий от стенки к стенке цилиндра. Ток I можно записать следующим образом: $I=2\pi r_1 l j_1$; подставляя сюда $j_1=2\sigma/\rho r_1$, находим $I=4\pi l\sigma/\rho$ и, вычисляя отношение V/I, получаем ответ.

242. $R=\frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$.

243. Представим себе электростатическое поле между проводниками A и B, находящимися под определенной разностью потенциалов V, причем пространство между ними ничем не заполнено. Сравним это поле с полем электрических сил, когда пространство между этими проводниками заполнено однородной проводящей средой (удельное сопротивление ρ) и к ним приложена та же разность потенциалов V. Так как среда однородна и поверхности проводников являются эквипотенциальными поверхностями, то напряженность поля E в обоих случаях одинакова. В случае электростатического поля $CV=Q=\int\sigma\,dS$, где σ—поверхностная плотность заряда на элементе dS поверхности и интеграл берется по поверхности одного из проводников. Так как $E=4\pi\sigma$, то

$$CV=\frac{1}{4\pi}\int E\,dS. \qquad (243.1)$$

В случае постоянного тока

$$\frac{V}{R}=I=\int j\,dS,$$

где j—плотность тока и интеграл берется по поверхности того же проводника. Для всех точек пространства закон Ома дает $E=j\rho$.

Следовательно,

$$\frac{V}{R}=\frac{1}{\rho}\int E\,dS. \qquad (243.2)$$

Сравнивая (243.1) и (243.2), получаем $R=\rho/(4\pi C)$.

244. $R=\rho/(2\pi r)$.

Указание. Для решения нужно применить результаты предыдущей задачи и задачи 116.

245. $R=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\rho_1}{C_1}+\frac{\rho_2}{C_2}\right)$.

246. $V_1\approx 95$ В, $V_2\approx 100$ В; $N_1\approx 45$ Вт, $N_2\approx 0,1$ Вт. При увеличении внешнего сопротивления вдвое в случае 1) I и N упадут почти вдвое; в случае 2) I почти не изменится, а N возрастет вдвое.

247. $V_1=110$ В, $V_2\approx 67$ В; $N_1=605$ Вт, $N_2\approx 222$ Вт. При уменьшении внешнего сопротивления в два раза V_1 не изменится, V_2 упадет до 50 В, N_1 возрастет в два раза, N_2 увеличится до 250 Вт.

248. См. рис. 235.

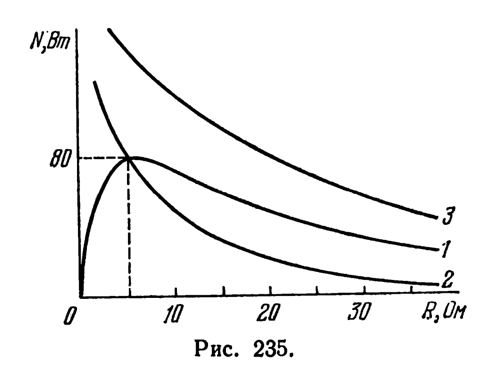


Рис. 235.

249. $l''=l\sqrt[3]{\frac{V'^2N''}{V^2N}}$; $r''=r\sqrt[3]{\frac{N'^2V^2}{N^2V'^2}}$.

250. Повысить напряжение на $p/2\%$.

251. $D=3,3$ см.

252. $S\approx 2\rho lN/(\mathscr{E}^2n)=8,5$ мм²; $D\approx 0,33$ см.

253. В $\frac{100+n}{10(1+n)}$ раз.

254. 1) $m/m_0=3/8$, где m — масса проводов системы *а*), m_0 — масса проводов эквивалентной системы *б*).

Указание. Условие одинаковой мощности дает $\mathscr{E}I_0=2\mathscr{E}I$, или $I_0=2I$, где $I=I_1=I_2$. Из условия одинаковости потребляемой мощности получаем $R=2R_0$, где $R=R_1=R_2$. Равенство потерь с учетом предыдущего условия дает $r=4r_0$, где r — сопротивление

одного провода в системе *а*), r_0 — то же для системы *б*). Учитывая, что в системе *а*) три провода, а в системе *б*) — два, приходим к ответу.

2) $\frac{N_0}{N}=\frac{(1+\alpha)^2}{4(1+\alpha^2-\alpha)}$, где N_0 — потери мощности в обычной сети *б*), а N — потери в системе Доливо-Добровольского. При $\alpha=1$ отношение потерь имеет минимум, поэтому небольшое рассогласование практически не вызывает увеличения потерь в эквивалентной системе *б*).

Указание. Условие одинаковости мощности генераторов $\mathscr{E}I_0=\mathscr{E}(I_1+I_2)$ и соотношение сопротивлений проводов, полученное в п. 1), дают все необходимое для ответа.

255. См. рис. 236.

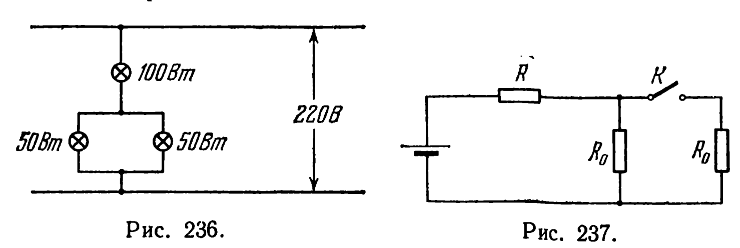


Рис. 236. Рис. 237.

256. Мощность, потребляемая первой лампочкой, уменьшится на 1,4 Вт, а второй — на 2,1 Вт.

257. См. рис. 237. $R=R_0/\sqrt{2}$.

258. $T-T_0=\frac{RI^2}{2\pi rlk}\left(1-\exp\left\{-\frac{2kt}{rc\tau}\right\}\right)$.

259. $T=\frac{V^2+kST_0R_0}{kSR_0-V^2\alpha}$.

260. $$N=\frac{V^2}{R_0}\left\{1+\frac{\alpha}{1-\alpha T_1}\left[T_0+T_1-T_1(1+\alpha T_0)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\exp\left(-\frac{mct}{kS(1-\alpha T_1)}\right)\right]\right\},$$

где $T_1=V^2/(kSR_0)$ и k — коэффициент в законе охлаждения Ньютона.

261. Решение. При заполнении пространства проводящей жидкостью электрическое поле между телами не изменится. Количество же ежесекундно выделяющегося тепла определится выражением $Q=\sum I_k\varphi_k$. Ток, текущий с поверхности k-го проводника,

$$I_k=\oint j_N\,dS,$$

где N — наружная нормаль к этой поверхности. Заряд на поверхности k-го проводника

$$q_k=\frac{1}{4\pi}\oint D_N\,dS=\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint E_N\,dS.$$

В результате находим

$$Q=\frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\sum q_k\varphi_k.$$

262. $I=\frac{V_0}{R}\exp\left\{-\frac{t}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)\right\}$, $Q=\frac{C_1C_2}{2(C_1+C_2)}V_0^2$.

263. $R\gg\Delta t/C\approx 10^8$ Ом; $Q_{\text{дж}}={}^1/_4C\mathscr{E}^2$.

§ 3. Постоянные магниты

264. Стрелки располагаются параллельно противоположным сторонам треугольника (рис. 238, *а*) — это положение устойчивого равновесия. Равновесие имеет место и в том случае, когда стрелки располагаются перпендикулярно к противоположным сторонам (рис. 238, *б*), однако это положение равновесия неустойчиво.

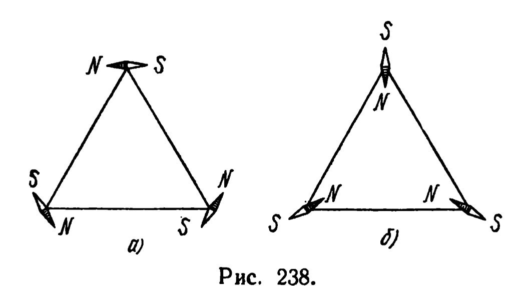


Рис. 238.

265. $V=-\frac{\mathfrak{M}\cos\varphi}{\mu d^2}$; $H=\frac{\mathfrak{M}}{\mu d^3}\times$ $\times\sqrt{1+3\cos^2\varphi}$; $\theta=\operatorname{arctg}({}^1/_2\operatorname{tg}\varphi)$.

Решение. Пусть $\mathfrak{M}=ml$, где l — расстояние между двумя магнитными массами m. Тогда потенциал в точке A (рис. 239) будет

$$V=-\frac{m}{\mu(d-{}^1/_2l\cos\varphi)}+\frac{m}{\mu(d+{}^1/_2l\cos\varphi)}\approx$$

$$\approx-\frac{ml\cos\varphi}{\mu d^2}=-\frac{\mathfrak{M}}{\mu d^2}\cos\varphi$$

Рис. 239.

при условии $l\ll d$. Угол $\alpha\approx l\sin\varphi/d$, поэтому нормальная к радиусу-

вектору составляющая напряженности поля будет

$$H_{\perp} \approx \frac{m}{\mu d^2}\alpha \approx \frac{\mathfrak{M}}{\mu d^3}\sin\varphi$$

с точностью до величины порядка l/d. Составляющая вдоль радиуса-вектора с той же точностью определится из выражения

$$H_{\parallel} \approx \frac{m}{\mu}\left[\frac{1}{(d-{}^1/_2 l\cos\varphi)^2} - \frac{1}{(d+{}^1/_2 l\cos\varphi)^2}\right] \approx \frac{2\mathfrak{M}}{\mu d^3}\cos\varphi.$$

Поле H и угол θ найдутся по формулам $H=\sqrt{H_{\perp}^2+H_{\parallel}^2}$ и $\operatorname{tg}\theta = H_{\perp}/H_{\parallel}$.

266. $\mathscr{E}_{\text{пот}} = -\mathfrak{M}H\cos\theta$.

267. $F=\frac{m^2}{(n-1)^2 l^2}+\frac{m^2}{(n+1)^2 l^2}-\frac{2m^2}{n^2 l^2} \approx \frac{m^2}{l^2}\frac{(6n^2-1)}{n^6} \approx \frac{6}{n^4}\left(\frac{\mathfrak{M}}{l^2}\right)^2$,

где $m=\mathfrak{M}/l$ — магнитная масса.

268. $T \approx \frac{\pi}{10\mathfrak{M}}\sqrt{Jl^3}$.

269. Так как момент возвращающей силы вследствие увеличения плеча этой силы возрастет, то период колебаний уменьшится.

270. $H=\frac{3mgl}{8\mathfrak{M}} \approx 450$ Э; $T=2\pi l\sqrt{\frac{2m}{3mgl-6\mathfrak{M}H}}$. Направление $\boldsymbol{H}$ противоположно $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$.

271. $T=\pi l\sqrt{m/(3\mathfrak{M}H)}$.

272. Стержень образует с плоскостью магнитного меридиана угол α, определяемый соотношением $C(\alpha-\alpha_0)=\mathfrak{M}H\sin\alpha$, где α_0 — угол, при котором нить не закручена (отсчитывается от плоскости магнитного меридиана), а C — коэффициент упругости нити при скручивании. С вертикалью стержень образует угол β, определяемый соотношением $\operatorname{tg}\beta=(mgR+H_{\text{г}}\mathfrak{M})/(\mathfrak{M}H_{\text{в}})$.

273. $H_0=0{,}8$ Э.

274. Поле H создается поверхностными магнитными зарядами, плотностью $\sigma=\mathscr{Y}$ (рис. 240, *а*). Поле B представлено на рис. 240, *б*. Внешние поля B и H совпадают. Внутреннее поле $B=-H+4\pi\mathscr{Y}$ и направлено по $\mathscr{Y}$.

275. $\mathfrak{M}=\frac{\pi^2 ml^2}{3T^2H} \approx 24$ СГСМ.

276. $H=6260$ Э; $\sigma=550$ СГСМ.

Указание. Сила $F=2\pi\sigma^2 S$, а поле в зазоре $H=4\pi\sigma$.

277. Возможны два положения равновесия:

1) $\uparrow\uparrow \quad \uparrow\uparrow$ — неустойчивое; 2) $\rightarrow\rightarrow \quad \rightarrow\rightarrow$ — устойчивое.

278. $H=\frac{2\pi}{Td}\sqrt{\frac{2J\operatorname{tg}\alpha}{d}}$.

279. $\mathfrak{M} = \frac{\pi d}{T} \sqrt{\frac{2Jd}{\operatorname{tg} \alpha}}$.

281. $\Psi = \frac{1}{8\pi} HB = \frac{\mu}{8\pi} H^2 + \Psi_0$; $U = \frac{1}{8\pi} \left(\mu + T \frac{d\mu}{dT}\right) H^2 + U_0$,

где Ψ_0 и U_0 зависят только от температуры и плотности магнетика.

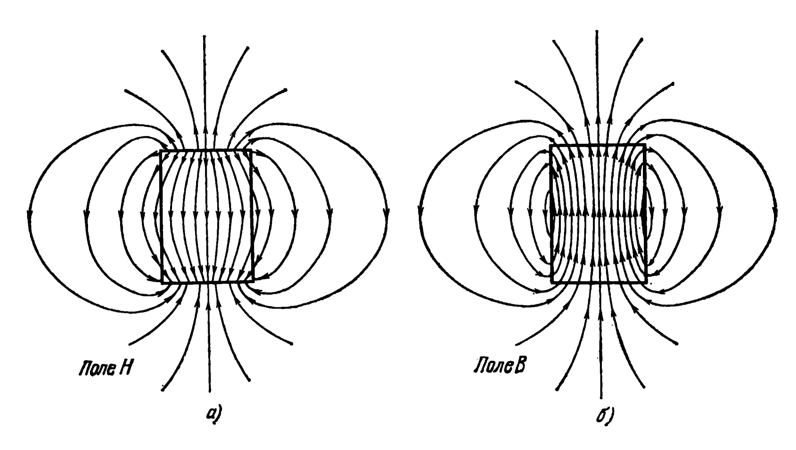


Рис. 240.

282. Результат следует из независимости μ от температуры для диамагнетиков.

283. $\Psi = \frac{\mu}{8\pi} H^2$; $U = \frac{1}{8\pi} H^2$.

284. $$C_B - C_H = \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_B \left(\frac{\partial B}{\partial T}\right)_H = -\frac{T}{4\pi} \frac{H^2}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)^2.$$

Надо нагревать магнетик в соленоиде и поддерживать постоянной силу тока в обмотке последнего. Труднее осуществить нагревание при $B = \text{const}$. Это было бы легко сделать, если бы магнетик был идеально проводящим. Тогда при любых изменениях тока в соленоиде магнитный поток Φ, а с ним и индукция B в магнетике оставались бы неизменными.

285. $$dT = -\frac{TH}{C_H} \frac{d\varkappa}{dT} dH = -\frac{TB}{\mu^2 C_B} \frac{d\varkappa}{dT} dB,$$

где $\varkappa = (\mu - 1)/4\pi$ — магнитная восприимчивость, C_H — теплоемкость парамагнетика при постоянном H, а C_B — при постоянном B.

286. $dT = \frac{\varkappa}{C} H\, dH$; $\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{2C_H}$. При обратимом адиабатическом размагничивании парамагнетик охлаждается.

287. $\Delta T = -\frac{\varkappa H^2}{fP} T \approx -0{,}007$ K, где f — число степеней свободы молекулы по классической теории теплоемкости. Для двухатомной молекулы, какой является молекула кислорода, $f=5$.

288. Вблизи абсолютного нуля теплоемкости всех тел стремятся к нулю.

290. Решение. Электронный газ в металлах находится в состоянии вырождения. Это значит, что для него обычные температуры, при которых металлы существуют в твердом состоянии, являются близкими к абсолютному нулю. К такому газу можно применить теорему Нернста и воспользоваться результатами задачи 289.

291. Решение. Поступая, как при решении задачи 181, найдем

$$\lim_{T \to 0} (\partial B/\partial T)_H = 0.$$

Отсюда получится требуемый результат, если принять во внимание, что $B = H + 4\pi \mathcal{Y}$.

292. Решение. В классической теории вблизи абсолютного нуля (где $x \longrightarrow \infty$)

$$\mathcal{Y} = n\mathfrak{M}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Теорема Нернста не выполняется, так как

$$\left(\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial T}\right)_H = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_H = -\frac{nk}{H} \neq 0.$$

Невыполнимость теоремы Нернста видна уже из того, что в классической теории Ланжевена допускаются всевозможные ориентации магнитных моментов. В таком случае на каждую вращательную степень свободы молекулы приходится средняя кинетическая энергия $kT/2$ и теплоемкость $k/2$. В квантовой теории допускаются только две ориентации магнитного момента: по полю и против поля $\boldsymbol{H}$. Поэтому вращательные степени не возбуждены, теплоемкость вблизи абсолютного нуля стремится к нулю, а намагниченность $\mathcal{Y}$ — к постоянному значению $\mathcal{Y} = n\mathfrak{M}$. Таким образом, $(\partial \mathcal{Y}/\partial T)_H = 0$ в согласии с теоремой Нернста.

§ 4. Магнитное поле тока. Сверхпроводник в магнитном поле[1]

293. Увеличится в четыре раза.

294. Перпендикулярно к плоскости контура: в точке A — к читателю, а в точке B — от читателя.

---

[1]) Если в формулах этого и всех последующих параграфов стоит множитель c или $1/c$, то имеется в виду гауссова система единиц. Если же этого множителя нет, то система СГСМ.

295. Внутри трубы $H=0$, вне трубы $H=2I/r$, где r — расстояние от оси.

296. Внутри проводника $H=2Ir/R^2$, вне проводника $H=2I/r$.

297.

$$H=\begin{cases} 2I\rho_2 r/(cA), & \text{если} \quad r \leqslant R_1, \\ 2I\left[\rho_1(r^2-R_1^2)+\rho_2 R_1^2\right]/(cAr), & \text{если} \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2, \\ 2I/(cr), & \text{если} \quad r \geqslant R_2, \end{cases}$$

где $A=\rho_1(R_2^2-R_1^2)+\rho_2 R_1^2$.

298. Магнитные силовые линии в трубке имеют форму коаксиальных дуг окружностей, центры которых расположены на оси щели. $H=Id/(\pi cRr)$. На оси трубки (при $r=R$) $H=Id/(\pi cR^2)\approx 0{,}1$ Э.

299. $H=2\pi jd=3140$ Э. Поле B перпендикулярно к линии AB и направлено вверх.

300. $H=\dfrac{2\pi}{c}\,j\,[\boldsymbol{sd}]$, где $\boldsymbol{s}$ — единичный вектор, направленный вдоль тока, а вектор $\boldsymbol{d}$ проведен от оси провода к оси цилиндрической полости.

301. $F=\dfrac{2I^2}{c^2(R^2-r^2)}\,d$. Сила направлена от оси цилиндра к оси стержня.

302. $H=\dfrac{2I}{r}(1+\cos\alpha)$, где r — расстояние от точки A; направление $\boldsymbol{H}$ перпендикулярно к проводнику с током $2I$.

303. $H=\dfrac{I}{r}\sqrt{6+4(\cos\alpha+\cos\beta)+2\cos(\alpha+\beta)}$, где r — расстояние от точки A. Вектор $\boldsymbol{H}$ образует угол $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{2+\cos\alpha+\cos\beta}$ с плоскостью, перпендикулярной к проводнику с током $2I$.

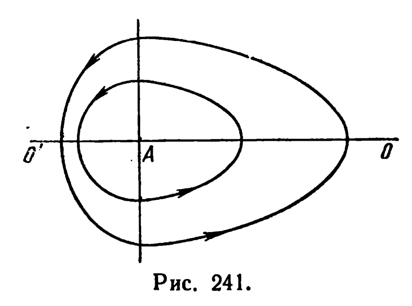


Рис. 241.

304. Вектор магнитного поля лежит в плоскости симметрии. Поле по линии AO перпендикулярно к этой линии и равно $H=2(\sqrt{2}-1)I/r$; по линии AO' оно равно $H=2(\sqrt{2}+1)I/r$; по линии, перпендикулярной к плоскости токов и проходящей через точку A, $H=\sqrt{2}I/r$, где r — расстояние от точки A. Линии магнитного поля будут наиболее сгущены левее точки A и наиболее разрежены правее этой точки. Примерный ход линий показан на рис. 241.

305. $H=0$.

306. $H=\frac{8I}{ab}\sqrt{a^2+b^2}$.

307. $H=18I/a$.

308. $H=0$.

309. $H=0$.

310. Напряженность

$$H=\frac{4\pi I}{R}(\sin 15^\circ+\sin 45^\circ+\sin 75^\circ)\approx\frac{7{,}73\pi I}{R}$$

направлена за плоскость чертежа и образует с плоскостью первого витка угол $\alpha=15^\circ$ (отсчет углов производится по часовой стрелке, если смотреть сверху).

311. Напряженность

$$H=\frac{16I}{hD}\sqrt{h^2+D^2}\left(\sin\frac{\pi}{8}+\sin\frac{3\pi}{8}\right)\approx\frac{20{,}9I}{hD}\sqrt{h^2+D^2}$$

образует с плоскостью витка AB угол 22°30′ (отсчет углов производится против часовой стрелки).

312. Внутри сферы поле соответствует полю прямого бесконечно длинного проводника с током I, а вне сферы поле равно нулю.

Указание. Ввиду осевой симметрии и замкнутости силовых линий силовые линии могут быть только кругами, лежащими в плоскости, перпендикулярной к AB. Учитывая это и применяя закон

$$\oint H\,ds=4\pi\sum I,$$

получаем ответ.

313. $H=\pi I(N+1)/R$.

Указание. $\sum_{n=1}^{N}\sin^2\frac{\pi n}{2N}=\frac{1}{2}(N+1)$.

314. $H=0$.

315. $H=\frac{4I}{R}\left(\arcsin\frac{d}{R}+\frac{\sqrt{R^2-d^2}}{d}\right)$.

316. $H=\frac{2\pi IN\ln(R_1/R_2)}{R_1-R_2}$.

Указание. Поле dH, создаваемое элементом тока $I\,dl$, равно $I\,d\varphi/r$, где r — расстояние элемента тока от центра спирали: $r=R_2+\frac{R_1-R_2}{2\pi N}\varphi$.

317. $H=\frac{2\pi NI}{l}(\cos\beta-\cos\alpha)$.

318. $H\approx$ 12,56; 12,56; 12,56; 12,44; 6,28; 0,25 Э. См. рис. 242.

319. $H=\frac{2\pi I}{p}$, где $p=a(1-\varepsilon^2)$.

320. $H=2\pi IR^2\left\{[R^2+(R+x)^2]^{-3/2}+[R^2+(x-R)^2]^{-3/2}\right\}$, где x — расстояние от центра симметрии. См. рис. 243, где

$$a\approx R\left(1-\frac{2}{25\sqrt{5}}\right),\quad b\approx\frac{2{,}2\pi I}{R},\quad c=\frac{\pi I\sqrt{2}}{R}.$$

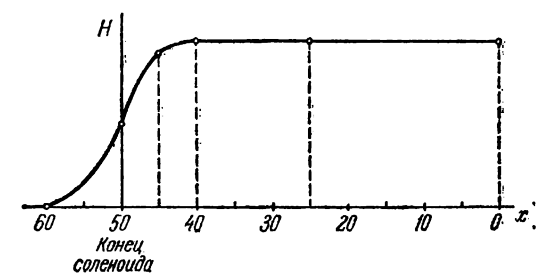


Рис. 242.

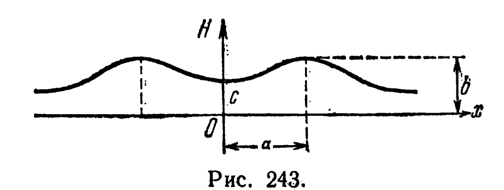


Рис. 243.

Указание. При определении $a=R-\varepsilon$ выражение для производной следует разлагать в ряд по малой величине ε/R.

321. 1) $H=\dfrac{qR^2}{3c}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right]$;

2) $H=\dfrac{qR^2}{5c}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\dfrac{\boldsymbol{\omega}}{r^3}\right]$.

(Вектор $\boldsymbol{r}$ проведен из центра шарика.)

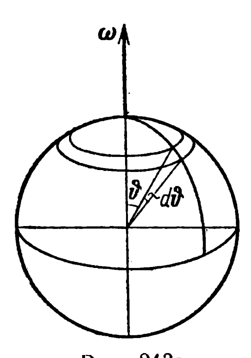


Рис. 243а.

Решение. Рассмотрим, например, случай 1). Возьмем на поверхности шарика бесконечно узкий поясок, заключенный между углами ϑ и $\vartheta+d\vartheta$ (рис. 243а). Вращаясь с угловой скоростью ω, такой поясок эквивалентен круговому току $dI=\omega q\sin\vartheta\,d\vartheta/(4\pi)$ с магнитным моментом

$$d\mathfrak{M}=S\,dI/c=\pi R^2q\omega\sin^3\vartheta/(4\pi c).$$

Интегрируя по ϑ, находим магнитный момент всего шарика: $\mathfrak{M}=qR^2\omega/(3c)$. Отсюда и получается результат, приведенный в ответе.

322. $x=\frac{mg}{k}-\frac{\pi^2N^2D^2I^2}{2kc^2l^2}$.

323. $H \approx 2Q\omega/c$. Магнитное поле направлено параллельно оси цилиндра. $V=(\omega R/c)^2 Q$. Центробежной силой можно пренебречь при условии $mc^2 \ll 2eQ$, где e — заряд, m — масса электрона.

324. Решение. Объемная плотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{связ}}=-\operatorname{div}\mathcal{P}=-k\operatorname{div}\boldsymbol{r}=-k\left(\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}\right)=-2k,$$

т. е. постоянна во всем объеме цилиндра. Вращаясь с угловой скоростью ω, связанные заряды создают токи с объемной плотностью

$$j=\omega r\rho_{\text{связ}}=-2k\omega r.$$

Магнитное поле в точке r создают только внешние кольцевые токи, т. е. такие токи, которые текут на расстояниях, бóльших r. Сила таких токов, приходящаяся на единицу длины цилиндра,

$$\int_r^R j\,dr=-2k\omega\int_r^R r\,dr=k\omega(r^2-R^2).$$

На поверхности поляризованного цилиндра возникают поверхностные связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{связ}}=\mathcal{P}=kR$. Кольцевой ток, создаваемый на единице длины цилиндра этими поверхностными зарядами, равен $k\omega R^2$. Сложив его с кольцевым током объемных зарядов, найдем полный внешний кольцевой ток, приходящийся на единицу длины цилиндра: $I=k\omega r^2$. Такой ток создает внутри цилиндра магнитное поле

$$H=\frac{4\pi I}{c}=\frac{4\pi}{c}k\omega r^2,$$

направленное параллельно оси цилиндра.

325. $I=\frac{cl}{4\pi N}H_{\text{нас}}$; $d \geqslant \frac{N}{c\mathcal{I}_{\text{нас}}}(I-I_0)$.

326. Перпендикулярно к оси тока. Сила

$$F=\frac{\varkappa}{\tau}mH\frac{dH}{dx}=\frac{3\pi^2\varkappa mI^2}{4\tau R^3}\approx 1{,}1\cdot 10^{-7}\text{ дин},$$

где H — напряженность магнитного поля, а x — расстояние от центра круга.

Указание. Магнитный момент стерженька $\mathfrak{M}=-\frac{\varkappa}{\tau}mH$; сила, действующая на намагниченное тело в неоднородном поле, $F=-\mathfrak{M}\,dH/dx$.

327. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\pi CVNn\cdot 10^{-6}}{5RH}=13°30'$.

328. Сопротивление в цепи конденсатор — тангенс-буссоль, пока оно невелико, на отклонение стрелки не влияет, так как количество электричества, которое протекает ежесекундно, не зависит от величины сопротивления. Однако если сопротивление будет велико, то конденсатор может не успевать разряжаться полностью, и отклонения будут меньше.

329. $R' = \dfrac{r \operatorname{tg} \alpha_1 - R \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1} = 3{,}7$ Ом.

330. $I = k \dfrac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta'}{\sqrt{4 + (\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta')^2}}$.

Указание. Силы, действующие в обоих случаях на конец стрелки, показаны отрезками $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ на рис. 244, где OO' — плоскость тока; поле Земли направлено по OC. $AC = CB$ и $OC \cdot I = CB \cdot k$.

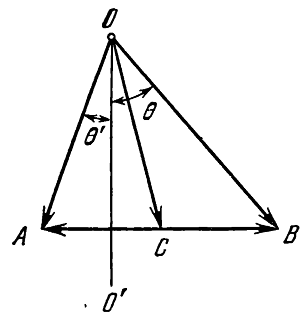


Рис. 244.

331. Меньше двух ампер, так как $I = 2 \sin \vartheta$ ампер.

332. 1) $I' = \dfrac{IR'}{2R} (\operatorname{ctg} \theta - \operatorname{ctg} \theta')$.

2) $H = \dfrac{\pi I}{R} (\operatorname{ctg} \theta + \operatorname{ctg} \theta')$.

333. $I = \dfrac{HRR'}{2\pi (R \operatorname{ctg} \theta - R')}$.

334. $I = \dfrac{M\theta}{HSn \cos \theta}$.

335. $l_0 = l + \dfrac{\mu_0 N^2 S}{kl} \dfrac{I^2}{2}$.

Решение. Закон сохранения энергии в данном случае следует записать так:

$$\mathscr{E}\, dq = dW_\text{м} + \delta A + \delta Q,$$

$dW_\text{м}$ — изменение энергии магнитного поля катушки, δA — элементарная работа, $\delta Q = RI^2\, dt$ — энергия, рассеянная в форме тепла. Переписывая закон сохранения энергии в виде $(\mathscr{E} - RI)\, dq = dW_\text{м} + \delta A$ и учитывая, что $\mathscr{E} - RI = d\Phi/dt$, получим

$$I\, d\Phi = dW_\text{м} + \delta A.$$

Левую часть можно преобразовать следующим образом:

$$I\, d\Phi = I d\,(LI) = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) + \frac{I^2}{2} dL.$$

Отсюда элементарная механическая работа в цепи с индуктивностью $\delta A = \dfrac{I^2}{2} dL = \delta_I W_\text{м}$. Полагая индуктивность равной $L = \dfrac{\mu_0 N^2}{l} S$,

определяем силу, сопряженную с координатой l:

$$\delta A = F_э\, dl = \frac{I^2}{2}\left(-\frac{\mu_0 N^2}{l^2} S\right) dl.$$

Знак «—» указывает на то, что осевая сила стягивает катушку. Приравнивая $F_э$ силе упругости $F_{упр} = k(l_0 - l)$, получаем приведенный ответ.

336. Точность около 1%.

337. Момент пары сил $M = 4\mathfrak{M}_0 SI$ и направлен по диагонали AC.

338. 1) Проводник притягивается к магниту с силой $F = \frac{2\pi\mathfrak{M}_0 SIR^2}{(d^2+R^2)^{3/2}}$; 2) проводник растягивается по радиусам с силой $f = \frac{\mathfrak{M}_0 SId}{(d^2+R^2)^{3/2}}$ на каждую единицу длины.

339. $A = 4\cdot 10^{-8} HSIn$ Дж.

340. 1) $M = mI(2-\sqrt{2})$; 2) $x = l(\sqrt{2}-1)$.

341. $\omega = \frac{H}{20}\frac{\mathscr{E}}{Rk}\left(1-\exp\left\{-\frac{3kt}{m}\right\}\right)$, где $k = \alpha + \frac{H^2 l^2}{4R}\cdot 10^{-9}$.

342. 1) $\alpha \approx 12°15'$. 2) $I = 4{,}7\cdot 10^{-7}$ А.

343. Положение равновесия — плоскость рамки перпендикулярна к направлению внешнего поля. Когда направление магнитного поля, создаваемого током, совпадает с направлением внешнего поля — равновесие устойчиво; когда эти направления противоположны — неустойчиво.

344. 1) По часовой стрелке, если смотреть в направлении поля. 2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{a^2 nIH}}$.

345. $\Phi = 0{,}4Na^2\mu I/D = 32\,000$ Мкс.

346. $\Phi = \frac{0{,}4\pi Na^2\mu I}{\pi D + (\mu - 1)d} \approx 24\,000$ Мкс.

347. $\mu = \frac{\pi D(\Phi_1 - \Phi_2)}{\Phi_2 d_2 - \Phi_1 d_1} + 1 = 315$.

348. При параллельном соединении катушек (соединить концы *1—3* и *2—4*) подъемная сила в четыре раза больше.

349. $F \approx 5$ кгс.

350. $I \approx 6{,}5$ А.

351. $I = \sqrt{\frac{mgl}{0{,}4\pi nNS}}$.

352. Значительное укорочение длинной катушки приведет к уменьшению груза m, так как напряженность магнитного поля катушки при сокращении ее длины будет уменьшаться.

353. Силу переменного тока можно измерять при условии, что период тока много меньше периода колебаний весов. Прибор будет показывать эффективную силу тока.

354. Прибор будет измерять мощность, если длинную катушку с большим числом витков включить параллельно нагрузке, а короткую катушку с малым числом витков — последовательно с нагрузкой. Момент сил, действующих на коромысло, будет пропорционален произведению сил токов, текущих в катушках, т. е. пропорционален мощности, подводимой к нагрузке.

355. $P = 2\pi I^2 n^2$.

Решение. Сила, действующая на элемент тока $I\,dl$, находящийся в магнитном поле, равна $I\,dl\,H$, где H — «действующее» магнитное поле. Под действующим полем понимают в данном случае магнитное поле, создаваемое в данной точке всеми элементами обтекаемого током соленоида, кроме самого рассматриваемого элемента. Действующее поле может быть найдено из следующих соображений. Внутри длинного соленоида поле вблизи элемента тока $I\,dl$ складывается из поля H, создаваемого всеми элементами тока соленоида, кроме данного элемента тока, и поля H', создаваемого данным элементом тока. Сумма этих двух полей одинакового направления равна $4\pi nI$, т. е. $H + H' = 4\pi nI$. Вне длинного соленоида сумма этих полей вблизи рассматриваемого элемента тока, как известно, равна нулю вследствие того, что поле H' меняет свое направление на обратное, т. е. $H - H' = 0$. Из написанных двух уравнений находим $H = 2\pi nI$, откуда сила, действующая на элемент тока, равна $2\pi I^2 n\,dl$, а искомое давление $P = 2\pi I^2 n^2$.

356. В проводниках, обтекаемых током, объемный электрический заряд равен нулю, так как число электронов и число положительных ионов одинаково. Электрические заряды могут быть только на поверхности проводников, но при не очень больших разностях их потенциалов они невелики и силы взаимодействия между ними ничтожны. Поэтому преобладают магнитные силы, т. е. силы взаимодействия между движущимися зарядами, и при одинаковом направлении токов они создают притяжение. В катодных пучках объемный электрический заряд не равен нулю (так как присутствуют только электроны), и из сил взаимодействия преобладают силы отталкивания между одноименными зарядами; магнитные же поля катодных пучков слабы.

357. См. рис. 245. Электрические силовые линии — пунктирные линии. Магнитные силовые линии — сплошные линии. По левому проводу ток идет от наблюдателя за чертеж. По правому проводу — от чертежа к наблюдателю. Для построения графика учесть ответ задачи 36.

358. Электрическое поле отсутствует, так как между проводами в соответствующих точках нет разности потенциалов. Магнитное поле

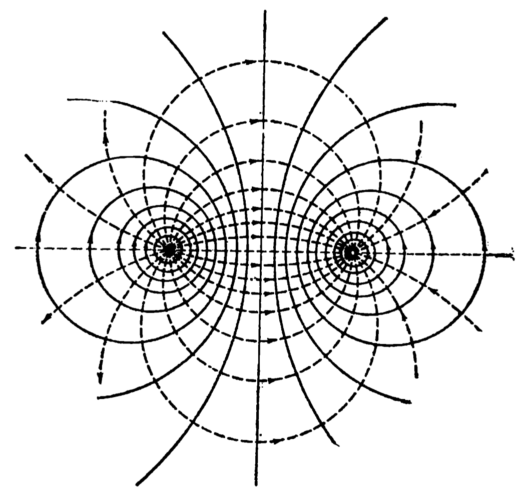


Рис. 245.

изображено на рис. 246. В точке A магнитное поле равно нулю, а вдали от точки A поле имеет цилиндрическую симметрию и соответствует полю прямого тока удвоенной силы.

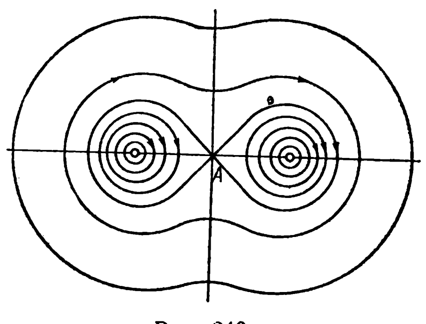


Рис. 246.

359. Положение равновесия будет на расстоянии $d = 0{,}02Iil/mg$, но оно неустойчиво, и провод либо упадет, либо притянется к шине.

360. 1) Сила взаимного притяжения между шиной и проводом при расстоянии x равна $F = \frac{0{,}02Ii}{x}\,l$. Равнодействующая силы тяжести и сил упругости пружин направлена вниз и равна $f = 2k(h - x)$. В положении равновесия $F = f$. Поэтому

$$x_1 = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{0{,}01Iil}{k}} \quad \text{(устойчивое равновесие)},$$

$$x_2 = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{0{,}01Iil}{k}} \quad \text{(неустойчивое равновесие)}.$$

Если $h^2/4 \leqslant 0{,}01Iil/k$ или $k < 0{,}04Iil/h^2$, провод притянется к шине.

2) Провод отталкивается и будет находиться на расстоянии

$$x = \frac{h}{2} + \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{0{,}01 Iil}{k}}$$

в устойчивом равновесии.

361. Установится разность уровней жидкости в вертикальных трубках; в правой трубке (если смотреть со стороны северного полюса) жидкость будет стоять выше.

362. $I = hd\tau g/B$. Чувствительность пропорциональна B и обратно пропорциональна d и τ.

363. Объемная плотность пондеромоторных сил равна $\frac{1}{c}[\boldsymbol{jB}]$. Поэтому, по аналогии с законом Архимеда, можно утверждать, что выталкивающая сила равна $\frac{V}{c}[\boldsymbol{jB}]$. Однако из-за неоднородности тока вблизи тела в общем случае возникает течение жидкости, уменьшающее выталкивающую силу.

364. Опустится на $h = H^2\varkappa/(2\tau g)$, если $\varkappa < 0$, и поднимается на h, если $\varkappa > 0$.

365. $\Delta h = \frac{\lambda VBl}{ac\tau g} = 0{,}6$ см.

366. Решение. Сила, действующая на столб ртути в трубе, $F \approx IDB/c$. Такая сила эквивалентна разности давлений на концах трубы: $P_2 - P_1 = 4F/(\pi D^2)$. Подставляя эту разность в гидродинамическую формулу Пуазейля, получим

$$I \approx 32\eta cl/(BD^3) = 1{,}8 \cdot 10^{12}\ \text{СГСЭ} = 600\ \text{А}.$$

367. $I_0 = \frac{I}{1 + (\mu - 1)\, l/L}$.

368. $f = B^2/(8\pi)$ (давление, направленное к центру цилиндра).

369. $I = c\pi R^2 B/L = 9{,}4 \cdot 10^{10}$ СГСЭ $= 31$ А.

370. $i = Ih/(\pi r^2)$, где r — расстояние между проводом и точкой наблюдения. Сверхпроводящий ток параллелен току I и течет в противоположном направлении.

371. $I \geqslant c\sqrt{mgh/(2\pi R)} = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ СГСЭ $= 25$ А.

372. $h = \frac{1}{2}\left(\frac{3\mathfrak{M}^2}{mg}\right)^{1/4} \approx 2{,}1$ см.

373. Решение. Введем предположение, оправдываемое последующим расчетом, что вне шара на однородное поле B_0 накладывается поле точечного диполя с магнитным моментом $\mathfrak{M}$, помещенного в центре шара (рис. 247). Тогда

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + \frac{3(\boldsymbol{\mathfrak{M}r})}{r^5}\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{\mathfrak{M}}}{r^3}.$$

Момент $\mathfrak{M}$ определится из условия, чтобы нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{B}$ на поверхности шара обращалась в нуль:

$$B_r = B_0 \cos\vartheta + \frac{2\mathfrak{M}}{R^3}\cos\vartheta = 0.$$

Этому условию при любых значениях углах ϑ удовлетворяет

$$\mathfrak{M} = -\frac{R^3}{2}\boldsymbol{B}_0.$$

На экваторе, т. е. при $r=R$, $\vartheta=90°$, получаем $B = {}^3/_2\,\boldsymbol{B}_0$. Поверхностный ток сверхпроводимости течет вдоль параллелей $\vartheta=\text{const}$, причем по теореме о циркуляции

$$i = \frac{3c}{8\pi} B_0 \sin\vartheta.$$

374. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 - \frac{2R^2(\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{r})}{r^4}\boldsymbol{r} + \frac{R^2}{r^4}\boldsymbol{B}_0$, где r — радиус-вектор, перпендикулярный к оси цилиндра, проведенный от оси к точке наблюдения. Поле на поверхности цилиндра максимально при $\vartheta=90°$ и равно $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{B}_0$ (см. рис. 247). Поверхностный ток течет параллельно оси цилиндра, причем

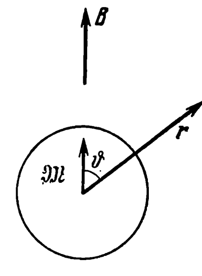


Рис. 247.

$$i = \frac{c}{2\pi} B_0 \sin\vartheta.$$

375. Решение. Пользуясь результатом решения задачи 373, легко показать, что потенциальная энергия в центре соленоида равна $^1/_2\,\mathfrak{M}B = {}^1/_4 B^2R^3$. Применяя далее уравнение энергии, находим $v \geqslant B\sqrt{3/(4\pi\tau)} \approx 170$ см/с.

376. Решение. Пренебрегаем краевыми эффектами. Ток в обмотке аппроксимируем током с постоянной объемной плотностью, что при оценках допустимо. Применяя теорему о циркуляции, находим магнитное поле B на различных расстояниях r от оси соленоида:

$$B = \begin{cases} B_0 & \text{при} \quad r \leqslant R_1, \\ B_0(R_2 - r)/(R_2 - R_1) & \text{при} \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2. \end{cases}$$

После этого легко находится магнитная энергия W системы:

$$W = \frac{lB_0^2}{48}[R_1(R_1+R_2) - R_2(R_2-R_1)] \approx 1{,}17\cdot10^{11}\ \text{эрг} \approx 2{,}8\cdot10^3\ \text{кал}.$$

Количество испарившегося гелия: $W/q \approx 4\cdot10^3\ \text{см}^3 = 4$ л.

377. Решение. Сила, действующая на проводник:

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{IH}]\,d, \quad F = \frac{d}{c}IH.$$

Сообщенный проводнику импульс:

$$p=\int\limits_0^t F\,dt=\frac{d}{c}H\int\limits_0^t I\,dt=\frac{d}{c}Hq.$$

Электрическое поле в конденсаторе:

$$E=4\pi\sigma=4\pi\frac{q}{S}, \quad q=\frac{ES}{4\pi}.$$

Подставим значение заряда q в выражение для импульса:

$$p=\frac{d}{c}Hq=\frac{dS}{4\pi c}EH=V\frac{1}{4\pi c}EH,$$

где V—объем конденсатора. На основании закона сохранения импульса находим плотность импульса поля:

$$p=\frac{1}{4\pi c}[EH].$$

§ 5. Электромагнитная индукция

378. При движении мостика возникает э.д.с. $\mathscr{E}$ и ток I и в единицу времени совершается работа $\mathscr{E}I$. Эта работа совершается внешней силой F, и, следовательно, $\mathscr{E}I=Fv$, где v — скорость движения мостика. С другой стороны, сила, действующая на мостик вследствие наличия тока I_1 в магнитном поле, индукция которого B, равна $F_1=BI_1l$, где l—длина мостика. Если $I_1=I$, то, по принципу Ленца, $F_1=-F$. Поэтому $\mathscr{E}=-Blv$. Так как изменение потока индукции Φ, пронизывающего контур, при перемещении dx мостика есть $d\Phi=Bl\,dx$, то $Blv=d\Phi/dt$. Окончательно получаем $\mathscr{E}=-d\Phi/dt$, а это и есть закон индукции.

379. Во всех случаях 1 мВ.

380. Будет, так как: 1) контур, сквозь который меняется поток индукции, лежит частью в вертикальной плоскости (колеса и скат); 2) непрямолинейный путь должен быть одновременно и наклонным к горизонту.

381. Решение. При удалении магнита через цепь проходит количество электричества $Q=\Delta\Phi/R$, где $\Delta\Phi$—изменение магнитного потока через кольцо, а R—сопротивление цепи (включая сопротивление гальванометра). Для вычисления $\Delta\Phi$ предположим сначала, что кольцо состоит только из одного витка. Магнитное поле вдали от магнита $B=\mathfrak{M}/r^3$. Вблизи и внутри магнита это выражение несправедливо. Однако полный магнитный поток через бесконечную плоскость, в которой расположен виток, равен нулю. Поэтому при вычислении $\Delta\Phi$ можно взять бесконечную плоскость вне витка, где

указанное выражение применимо. Иначе говоря, интегрирование можно произвести в пределах от $r=a$ до $r=\infty$. Это дает $\Delta\Phi=2\pi\mathfrak{M}/a$. Для кольца из N витков это выражение надо увеличить в N раз, т. е. в этом случае $\Delta\Phi=2\pi N\mathfrak{M}/a$. Таким образом,

$$RQ=2\pi N\mathfrak{M}/a.$$

Измерив Q, отсюда можно найти $\mathfrak{M}$.

382. $\mathcal{E}=2Iab\dfrac{v}{x(x+a)}$, где x — расстояние между рамкой и проводом. Если провод вертикален и ток в нем идет снизу вверх, то в рамке, удаляющейся от провода, возникает ток, идущий по часовой стрелке.

383. Нет, так как поле вокруг рамки неоднородно.

384. $\mathcal{E}=H_0ab\,[\omega\sin\omega t\cos(\omega' t-\varphi)+\omega'\cos\omega t\sin(\omega' t-\varphi)]$.

1) $\mathcal{E}=H_0ab\omega\sin 2\omega t$ при $\varphi=0$;

2) $\mathcal{E}=H_0ab\omega\cos 2\omega t$ при $\varphi=-\pi/2$.

385. $\mathcal{E}=Hab\omega\sin\left\{\omega_0\left(t-\dfrac{1-e^{-kt}}{k}\right)\right\}$.

386. $\sigma=vB/(4\pi c)=0{,}3$ СГСЭ $=10^{-10}$ Кл/см^2. Отрицательное электричество сместится в направлении вектора $[\boldsymbol{vB}]$; положительное — в противоположном направлении.

387. $\sigma=\omega Br/(4\pi c)=6\cdot10^{-7}$ СГСЭ $=2\cdot10^{-16}$ Кл/см^2. Поверхностные заряды положительны.

388. Решение. Так как в стационарном состоянии ток внутри шара должен отсутствовать, то электрическое поле $\boldsymbol{E}^{(i)}$ должно компенсироваться силой $\dfrac{1}{c}[\boldsymbol{vB}]$. Это дает для электрического поля внутри шара

$$\boldsymbol{E}^{(i)}=-\frac{1}{c}[\boldsymbol{vB}].$$

Объемных зарядов внутри шара не будет, так как $\operatorname{div}\boldsymbol{E}^{(i)}=0$. Касательная составляющая поля $\boldsymbol{E}^{(i)}$, а следовательно, и внешнего поля $\boldsymbol{E}^{(e)}$, на поверхности шара будет $E_\vartheta=E^{(i)}\sin\vartheta$, где ϑ — угол между направлением вектора $\boldsymbol{E}^{(i)}$ и радиусом $\boldsymbol{r}$, проведенным из центра шара. Внешнее поле $\boldsymbol{E}^{(e)}$ ищем как поле диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{p}$, помещенного в центре шара:

$$\boldsymbol{E}^{(e)}=\frac{3(\boldsymbol{pr})}{r^5}\boldsymbol{r}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}.$$

Вектор $\boldsymbol{p}$ легко найти по значению касательной составляющей $\boldsymbol{E}_\vartheta$. Таким путем получаем

$$\boldsymbol{E}^{(e)}=\frac{3a^3}{cr^5}([\boldsymbol{vB}]\,\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}-\frac{a^3}{cr^3}[\boldsymbol{vB}].$$

Поверхностная плотность зарядов σ определится по скачку нормальных составляющих электрического поля. Она равна

$$\sigma = \frac{3}{4\pi c}([\boldsymbol{vB}]\,\boldsymbol{n}),$$

где $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности шара.

389. $i = \frac{V}{R} - I\frac{r}{R} = 0{,}7$ А.

390. $\varkappa = \frac{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2}{4\pi\mathscr{E}_2} \approx 13\cdot 10^{-5}$.

391. 1) $I \approx 1{,}2$ А. 2) Ток возрос бы до 240 А и обмотка якоря перегорела бы.

392. $I = 0{,}314$ А.

393. Сила тока останется прежней: 0,314 А.

394. $E = \frac{\varepsilon\omega}{2\pi c r}\Phi_0 \sin\omega t$.

395. Решение. 1) На заряд e, вращающийся вместе с цилиндром, действует сила Лоренца

$$\boldsymbol{F} = \frac{e}{c}[\boldsymbol{vB}] = \frac{e}{c}[[\boldsymbol{\omega r}]\,\boldsymbol{B}] = \frac{e}{c}(\boldsymbol{\omega B})\,\boldsymbol{r}.$$

Она вызывает такую же поляризацию диэлектрика, как электрическое поле с напряженностью $\frac{1}{c}(\boldsymbol{\omega B})\,\boldsymbol{r}$, т. е.

$$\boldsymbol{P} = \frac{\alpha}{c}(\boldsymbol{\omega B})\,\boldsymbol{r} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\boldsymbol{\omega B})\,\boldsymbol{r}.$$

Отсюда $\left(\text{так как } \operatorname{div}\boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2\right)$

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div}\boldsymbol{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\boldsymbol{\omega B}).$$

2) $q = \int \rho_{\text{связ}}\, dV = -\frac{\varepsilon - 1}{2c}(\boldsymbol{\omega B})(r_2^2 - r_1^2)$.

3) Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях цилиндра:

$$\sigma_{1\text{связ}} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\boldsymbol{\omega B})\,r_1, \qquad \sigma_{2\text{связ}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\boldsymbol{\omega B})\,r_2.$$

4) Полный заряд цилиндра остается равным нулю.

396. $R = 4\pi n N\omega S$.

397. Надо с помощью флюксметра, размеры которого малы по сравнению с радиусом цилиндра, измерить магнитное поле в центре одного из оснований цилиндра. Поле внутри соленоида будет в два раза больше.

398. 1) $N \approx 1$ об/с. 2) Нужно увеличить ее в $\rho_ж/\rho_м$ раз, т. е. в 5,06 раза.

399. Если ось стержня принять за ось Z, то электрические силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных к оси Z, и представляют собой концентрические окружности с центрами на оси Z (рис. 248). Напряженность поля E обратно пропорциональна расстоянию от оси Z.

400. 1) Постоянный ток силой $I = -\frac{d\Phi/dt}{R}$, где Φ — поток индукции в стержне. 2) Если поток в стержне направлен сверху вниз, то ток в витке идет против часовой стрелки, если глядеть сверху.

401. Будет описывать вокруг стержня раскручивающуюся спираль со все возрастающей скоростью.

402. 1) $L = 0{,}25$ Г. 2) $N = 250$.

403. Нужно измерить силу тока I и напряженность H магнитного поля внутри катушки, определить площадь поперечного сечения S и число витков N. Тогда магнитный поток через катушку $\Phi = HSN = LI$, откуда $L = HSN/I$.

Рис. 248.

404. $L = 0{,}24 \cdot 10^{-6}$ Г.

Указание. Напряженность магнитного поля внутри трубки на расстоянии r от оси равна $H = 2I/r$ (краевыми эффектами пренебрегаем). Вне трубки магнитного поля нет. Поэтому поток через радиальную перегородку

$$\Phi = 2Il \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r},$$ где l — длина трубки, r_0 — радиус провода, r_1 — внутренний радиус трубки. На единицу длины будем иметь $L = 2\ln(r_1/r_0)$.

405. $L \approx 4\ln(d/r) \approx 9{,}2 \cdot 10^{-9}$ Г.

406. $M = \sqrt{L_1 L_2} = 0{,}6$ Г.

407. 1) L близка к 0; 2) $L = 0{,}2$ Г; 3) $L = 0{,}05$ Г.

408. $d = \frac{L_1(L_0 - L)}{L(L_0 - L_1)} d_1 = 3$ мм.

409. $L = 2bN \ln(1 + a/r)$.

410. $M = L = 2bN \ln(1 + a/r)$.

411. $\Phi_{21} = 4\pi NnSI/l = 10^5$ Мкс $= 10^{-3}$ Вб.

412. $\Phi_{21} = 2NnbI \ln(1 + a/r) = 10^5$ Мкс $= 10^{-3}$ Вб.

413. $W=2\pi N^2SI^2/l$.

414. 1) $8\ln 2$ эрг. 2) Увеличится на $8\ln 2$ эрг.

415. Так как провода отталкиваются друг от друга, то, по принципу Ленца, при удалении проводов в них должны возникать э.д.с. индукции, направленные навстречу текущим токам. Следовательно, чтобы поддержать неизменными токи в проводах, в них на время движения должны быть включены добавочные э.д.с., направленные в ту же сторону, куда текут токи. Работа этих э. д. с. и идет на совершение механической работы и увеличение магнитной энергии системы. Если же не включать добавочных э. д. с., то сила тока в проводах в течение времени Δt, пока происходит их движение, будет меньше, чем когда провода неподвижны. Соответственно уменьшается и работа э. д. с. $\mathscr{E}I\,\Delta t$, поддерживающих токи в проводах. Однако еще значительнее уменьшится количество тепла $RI^2\Delta t$, выделяющееся в проводах. За счет этой «экономии» в джоулевом тепле и происходит механическая работа и увеличение магнитной энергии системы.

416. $I_0=\dfrac{\mathscr{E}}{L}\,t$, где t — время, прошедшее с момента включения. Но когда сила тока заметно возрастает, даже малое омическое сопротивление цепи будет играть уже принципиальную роль. Вследствие наличия сопротивления нарастание тока замедлится, а потом прекратится.

417. $V_{\text{макс}}/V_0=r/R$. Чем меньше r, тем меньше $V_{\text{макс}}$. Однако слишком малым r брать не следует во избежание больших нагрузок на источник тока. Достаточно, чтобы $V_{\text{макс}}$ не превышало V_0, т. е. r должно быть меньше или порядка R.

418. 1) $a=\dfrac{mg}{m+CH^2l^2}$; 2) $I=\dfrac{mgHlC}{m+CH^2l^2}$.

419. $x=\dfrac{mgL}{H^2l^2}(1-\cos\omega t)$, где $\omega=\dfrac{Hl}{\sqrt{mL}}$.

420. Скорость будет расти, пока сила взаимодействия между индуцированным током и магнитным полем не достигнет величины, равной весу проводника. Это наступит при значении $v_{\text{уст}}=PR/(H^2l^2)$.

421. Координата нового положения равновесия

$$x(t)=\frac{mgL}{(Bl)^2}(1-e^{-\delta t}\cos\omega t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\frac{mgL}{(Bl)^2};$$

$\delta=\dfrac{(Bl)^2}{mR}$; $\omega=\dfrac{Bl}{\sqrt{mL}}$. Координата x отсчитывается вниз от исходного положения перемычки.

Решение.

$$m\ddot{x}=mg+Bl(I_L-I_R),$$
$$L\dot{I}_L=-Bl\dot{x},\qquad RI_R=Bl\dot{x}.$$

После подстановки в уравнение динамики значений токов I_L и I_R получим

$$\ddot{x}+\frac{(Bl)^2}{mR}\dot{x}+\frac{(Bl)^2}{mL}x=g;$$

отсюда после интегрирования при нулевых начальных условиях получаем

$$x=\frac{mgL}{(Bl)^2}(1-e^{-\delta t}\cos\omega t).$$

422. $v_{\text{уст}}=\frac{mgR}{(Bl)^2}$.

Решение. Уравнение динамики: $m\frac{dv}{dt}=mg+BlI$. Уравнение для электрической цепи: $L\frac{dI}{dt}+RI=-Blv$. Исключая из этой системы уравнений ток индукции I, получим для скорости движения перемычки $\ddot{v}+\frac{R}{L}\dot{v}+\frac{(Bl)^2}{mL}v=\frac{R}{L}g$.

Полагая $\ddot{v}=\dot{v}=0$, для установившейся скорости найдем

$$v_{\text{уст}}=\frac{mgR}{(Bl)^2}.$$

423. Логарифмический декремент увеличится в

$$\frac{(k+H^2l^3/4R)\sqrt{\frac{g}{l}-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}{k\sqrt{\frac{g}{l}-\left(\frac{k+H^2l^3/4R}{2ml}\right)^2}}\ \text{раз}.$$

424. Логарифмический декремент и период увеличатся в

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{l}-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}{\sqrt{\frac{g}{l}+\frac{H^2l^2}{4mL}-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}\ \text{раз}.$$

425. Логарифмический декремент уменьшится в

$$\sqrt{\frac{\frac{g}{l}\left(1+\frac{CH^2l^2}{4m}\right)-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}{\frac{g}{l}-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}\ \text{раз},$$

а период увеличится в

$$\frac{\left(1+\frac{CH^2l^2}{4m}\right)\sqrt{\frac{g}{l}-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}{\sqrt{\frac{g}{l}\left(1+\frac{CH^2l^2}{4m}\right)-\left(\frac{k}{2ml}\right)^2}}\ \text{раз},$$

426. 1) Логарифмический декремент увеличится в

$$\frac{(k+H^2S^2/R)\sqrt{4JC-k^2}}{k\sqrt{4JC-(k+H^2S^2/R)^2}}\ \text{раз.}$$

Здесь k — коэффициент трения, S — площадь кольца, J — момент инерции кольца, C — коэффициент кручения нити.

2) Затухание будет таким же, как в отсутствие магнитного поля.

427. Период уменьшится на ΔT, причем $\frac{\Delta T}{T}=\frac{T^2S^2H^2}{8\pi^2 LJ}$, если считать ΔT малым по сравнению с T.

428. Декремент затухания кольца уменьшится в

$$\sqrt{1+\frac{4H^2S^2J}{L(4JC-k^2)}}\ \text{раз.}$$

429. $Q=\frac{\Delta\Phi}{R}=\frac{SIb\ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right)}{(a+b)\rho}$.

430. Не изменится, так как ток в рамке до и после поворота равен нулю. В самом деле, по закону Кирхгофа $-\frac{d\Phi}{dt}=RI+L\frac{dI}{dt}$. Отсюда $\Delta\Phi=R\int_0^t I\,dt+L(I_к-I_н)$, но $I_к=I_н=0$. Следовательно, $\Delta\Phi=RQ$.

431. Будет. В самом деле, полный магнитный поток через контур идеального проводника остается неизменным. Он слагается из потока внешнего магнитного поля Φ и потока LI, создаваемого индукционными токами самого проводника, а потому $\Phi+LI=\Phi_0=\text{const}$. Количество электричества, прошедшего за время dt, будет $dQ=Idt=Id\alpha/\omega$, где $d\alpha$ — угол поворота за то же время, а ω — угловая скорость. За полоборота протечет электричество

$$Q=\frac{1}{\omega}\int_0^\pi I\,d\alpha=\frac{1}{L\omega}\int_0^\pi(\Phi_0-\Phi)\,d\alpha,$$

а эта величина обратно пропорциональна ω, так как интеграл от скорости вращения не зависит.

432. $\Delta\Phi=2000$ Мкс.

433. Время, за которое пластинку удаляют, должно быть очень мало по сравнению с периодом гальванометра.

434. Постоянная времени цепи $\tau=L/R$ должна быть много меньше периода гальванометра.

435. $M=QR_1R_2/\mathcal{E}$.

Решение. Уравнение вторичного контура: $L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 = M \frac{dI_1}{dt}$; здесь I_1 — ток в первичной обмотке. Проинтегрируем это уравнение по времени от 0 до ∞: $L_2 I_2 \Big|_0^\infty + R_2 Q = M I_1 \Big|_0^\infty$. Очевидно, что $I_2(0) = I_2(\infty) = 0$ и $I_1(0) = 0$, $I_1(\infty) = \mathscr{E}/R_1$. Поэтому $R_2 Q = M\mathscr{E}/R_1$, откуда $M = R_1 R_2 Q/\mathscr{E}$.

436. $Q = \frac{L\mathscr{E}}{2r(R+r)}$.

Решение. Так как сопротивление гальванометра мало, то $\varphi_A \approx \varphi_B$; поэтому токи через равные верхние плечи моста будут также равны. Обозначим каждый из них I_0. Тогда

$$I_G = I_0 - I_L, \quad 2I_0 = I_L + I_r, \quad I_r \cdot r = I_L \cdot r + L \frac{dI_L}{dt};$$

из последнего уравнения имеем $I_r = I_L + \frac{L}{r}\frac{dI_L}{dt}$, что дает

$$2I_0 - I_L = I_L + \frac{L}{r}\frac{dI_L}{dt}, \quad I_0 = I_L + \frac{L}{2r}\frac{dI_L}{dt}.$$

Выразив отсюда I_L и подставив в уравнение для I_G, получим

$$I_G = \frac{L}{2r}\frac{dI_L}{dt}.$$

Проинтегрируем это равенство по времени от 0 до ∞. Получим

$$Q = \frac{L}{2r} I_L \Big|_0^\infty, \quad I_L(0) = 0, \quad I_L(\infty) = \frac{\mathscr{E}}{R+r}.$$

Поэтому $Q = \frac{L\mathscr{E}}{2r(R+r)}$.

437. $\gamma = \frac{SNH \sin 30^\circ}{(R+r)q} = 5$ делений.

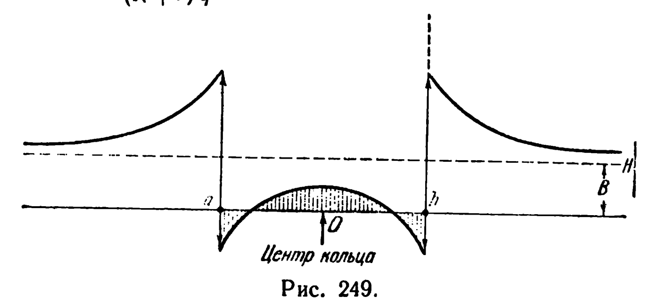


Рис. 249.

438. $I = \pi r^2 B/L$, где L — индуктивность кольца.

439. 1) Нуль. 2) $H = 2\pi^2 r B/L$. 3) См. рис. 249.

440. $H=0$; $I=0$.

441. $A=\pi^2 r^4 B^2/2L$.

442. $B=B_0(R/r)^2=5\cdot 10^6$ Гс; $P=B^2/(8\pi)\approx 10^{12}$ дин/см$^2=10^6$ атм.

443. $M=CR_1R_2$.

Решение. Применяя закон Кирхгофа к контуру, содержащему гальванометр G, можем написать $M\dot{I}_1=R_2I_2+rI$, где I_1 — ток в цепи источника э. д. с. $\mathcal{E}$ до ее размыкания, I_2 — разрядный ток, проходящий через R_2, I — ток через гальванометр (r — сопротивление гальванометра). Отсюда

$$\int M\dot{I}_1\,dt=R_2\int I_2\,dt+\int rI\,dt.$$

Но $\int \dot{I}_1\,dt=I_1$, $\int R_2I_2\,dt=R_2Q=R_2R_1I_1C$, $\int rI\,dt=0$. Поэтому $MI_1=R_2R_1I_1C$ и, следовательно, $M=R_2R_1C$.

444. $M=\left(C+c\dfrac{\theta}{\theta+\theta'}\right)R_1R_2$.

445. $Q=0{,}24\dfrac{4\pi^5N^4f^2D^3ah}{10^{18}\rho H^2}I^2_{\text{эфф}}\approx 6{,}85$ ккал.

446. $Q=0{,}24\dfrac{\pi^5N^4D^4\,df^2I^2_{\text{эфф}}}{10^{18}\cdot 2\rho H^2}\approx 35$ ккал.

447. Решение. Рассмотрим внутри пластинки контур, параллельный боковой поверхности пластинки (рис. 250). Магнитный поток сквозь этот контур

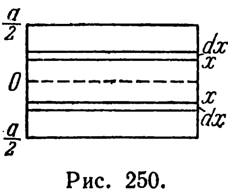


Рис. 250.

$$\Phi=BNS=\mu\cdot 4\pi nI_0\cos\omega t\cdot bx.$$

Э. д. с. индукции в этом контуре $\mathcal{E}=\mu\cdot 4\pi nI_0\omega\sin\omega t\cdot bx$. Сопротивление этого контура $R_x=\rho\dfrac{2b}{l\,dx}$ (пренебрегаем сторонами x вследствие их чрезвычайной малости по сравнению со сторонами b). Количество тепла, выделившееся в этом контуре за время dt,

$$dQ=0{,}24\frac{\mathcal{E}^2}{R}dt=0{,}24\frac{(\mu\cdot 4\pi nI_0\omega\sin\omega t\cdot bx)^2}{\rho\cdot 2b}b\,dx\,dt.$$

Отсюда количество тепла, выделяющееся ежесекундно в пластинке,

$$Q=0{,}24\frac{(\mu\cdot 4\pi n\omega bI_{\text{эфф}})^2\,l}{2\rho b}\int\limits_0^{a/2}x^2\,dx=0{,}24\frac{\mu^2\pi^2n^2\omega^2a^3bI^2_{\text{эфф}}}{3\rho}=0{,}6\text{ кал}.$$

448. $\dfrac{W_1}{W_2}=\dfrac{12a^2b^2}{(a+b)^2d^2}$.

449. 1) $I=\frac{NSH\omega}{\sqrt{[(1/C\omega)-L\omega]^2+R^2}}\sin(\omega t+\varphi)$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{(1/C\omega)-L\omega}{R}$; $V=\frac{NSH\omega\cos(\omega t+\varphi)}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+R^2\omega^2C^2}}$. 2) $LC\omega^2=1$. 3) $Q = 0{,}24\,\frac{N^2S^2H^2\omega^2}{2R\cdot 10^{16}}=4{,}8\cdot 10^{-16}$ ккал.

Указание. Уравнения Кирхгофа для цепи катушки имеют вид

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}=NSH\omega^2\cos\omega t,$$

$$LC\frac{d^2V}{dt^2}+RC\frac{dV}{dt}+V=NSH\omega\sin\omega t.$$

Стационарные значения I и V находятся как частные решения этих уравнений.

450. 1) $V=\frac{NSH\omega}{2}\exp\left\{-\frac{2t}{RC}\right\}$. 2) $Q=0{,}24\frac{N^2S^2H^2\omega}{8R\cdot 10^{16}}=12\cdot 10^{-10}$ ккал.

451. $I_R=I_r\omega\frac{\pi r^2}{R^2\rho}$.

Решение. Э. д. с. во внешнем контуре будет $\mathscr{E}=-M\frac{dI_r}{dt}$; следовательно,

$$I_R=\frac{\mathscr{E}}{2\pi R\rho}=\frac{I_r\omega M}{2\pi R\rho}.$$

Остается найти M. С этой целью обратим задачу: пусть ток I течет по внешнему контуру. Тогда вблизи его центра будет

$$B=H=\frac{2\pi I}{R},\qquad \Phi=BS=\frac{2\pi^2r^2}{R}.$$

Следовательно,

$$M=\frac{2\pi^2r^2}{R},\qquad I_R=I_r\omega\frac{\pi r^2}{R^2\rho},$$

где ρ должно быть выражено в единицах СГСМ. Если ρ выражено в Ом/см, то в ответе появляется множитель 10^{-9}.

452. Магнитная стрелка совершает гармоническое колебание относительно своего положения равновесия по магнитному меридиану. Когда снизу подводят диск из меди, расположенный горизонтально, то в нем возникают токи Фуко, которые тормозят колебания стрелки. В этих условиях дифференциальное уравнение движения стрелки будет

$$J\ddot{\alpha}=-H\mathfrak{M}\alpha-\eta\dot{\alpha},$$

где H — горизонтальная слагающая магнитного поля Земли, а η — коэффициент пропорциональности тормозящей силы. Уравнение

можно переписать так:

$$J\ddot{\alpha}+\eta\dot{\alpha}+H\mathfrak{M}\alpha=0.$$

Апериодическое движение стрелки будет при $\eta^2=4JH\mathfrak{M}$, или при $\eta=2\sqrt{JH\mathfrak{M}}$. Поэтому медный диск, вращающийся с угловой скоростью ω, будет действовать на стрелку с моментом $M=2\sqrt{J\mathfrak{M}H}\omega$. 1) Следовательно, если на стрелку действовать с таким же моментом, но направленным в противоположную сторону, то она не будет двигаться. 2) Так как стрелка не будет двигаться, то действие на нее диска выразится в выделении тепла. Мощность выделения тепла $N=M\omega=2\sqrt{J\mathfrak{M}H}\omega^2$. 3) Если стрелку освободить, то в начальный момент будет справедливо уравнение $J\dot{\omega}=M$. Отсюда $\dot{\omega}=2\sqrt{\mathfrak{M}H/J}\omega$. 4) Дальше на стрелку будет действовать и момент, создаваемый магнитным полем Земли. Если этот момент будет соизмерим с моментом M, то стрелка будет колебаться вокруг нового положения равновесия, определяемого соотношением $\sin\alpha=$ $=2\sqrt{J/(\mathfrak{M}H)}\,\omega$.

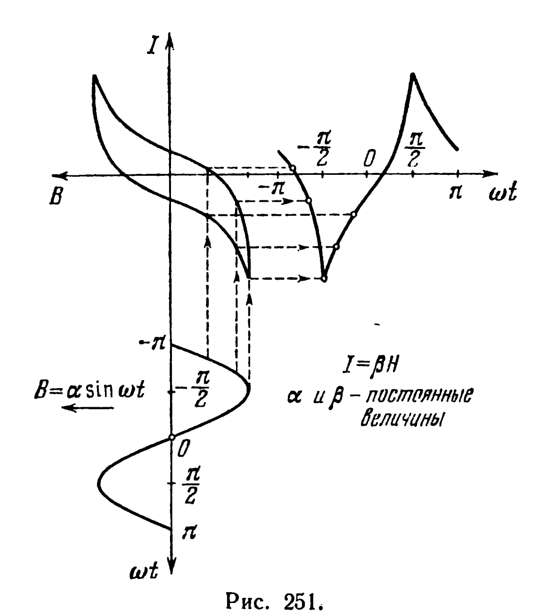


Рис. 251.

453. См. рис. 251.

454. Потому что при замыкании первичной цепи ток нарастает гораздо медленнее, чем спадает при размыкании цепи (см. задачу 452).

455. $W=\frac{CV^2}{2}\exp\left\{-\frac{2t}{RC}\right\}$; см. рис. 252, *а*.

456. $t\approx 7\cdot 10^{-4}$ с.

457. $N=\frac{\mathscr{E}^2}{R}\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}\right)\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}$; см. рис. 252, *б*.

458. 1) $Q=\int\limits_0^\infty I^2R\,dt=I_0^2R^2C/2=C\mathscr{E}^2/2$. 2) $\eta=1/2$.

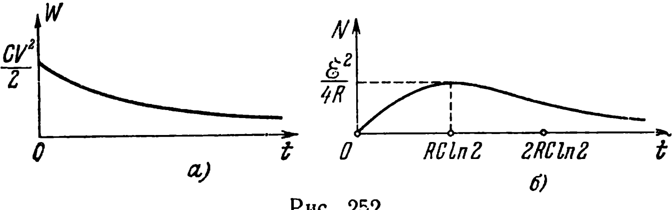


Рис. 252.

459. Полученный при решении предыдущей задачи результат, что ток мгновенно возрастает от нуля до I_0, объясняется пренебрежением индуктивностью цепи. В каждой реальной цепи есть хотя бы малая индуктивность, вследствие чего возрастание тока до $I_0=\mathscr{E}/R$ не будет мгновенным. Если индуктивность достаточно мала, то нарастание тока будет протекать так быстро, что во многих случаях его можно рассматривать как мгновенный скачок.

460. Уравнение цепи (по Кирхгофу) будет

$$\mathscr{E}-L\frac{dI}{dt}=RI+V \quad \text{или} \quad \mathscr{E}=L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C},$$

где Q — заряд на конденсаторе. При $R^2=4L/C$ характеристическое уравнение имеет кратный корень, а потому решение надо искать в форме

$$Q=\mathscr{E}C+(a+bt)\exp\left\{-\frac{R}{2L}t\right\},$$

где a и b — произвольные постоянные, определяющиеся из начальных условий $Q_{t=0}=0$ и $(dQ/dt)_{t=0}=0$. Поэтому: 1) $I=\frac{\mathscr{E}}{L}t\exp\left\{-\frac{R}{2L}t\right\}$; см. рис. 253; 2) $t=\frac{2L}{R}$; 3) $I_{\text{макс}}=\frac{2\mathscr{E}}{eR}$; 4) $V=\mathscr{E}\frac{e-2}{e}$; 5) $\eta=1/2$ (e — основание натуральных логарифмов).

Рис. 253.

461. $Q_R=0$, $Q_L=CV_0$.

Решение. После замыкания цепи

$$V_C = I_R R = L\frac{dI_0}{dt}.$$

Интегрируем это равенство по времени от 0 до ∞, получим $Q_R R = = L I_L |_0^\infty = 0$, так как $I_L(0) = I_L(\infty) = 0$. Следовательно, $Q_R = 0$, $Q_L = CV_0$.

462. $Q_1 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$, $Q_2 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}$.

Решение. После замыкания ключа

$$V_C = R_1 I_1 + L_1\frac{dI_1}{dt} = R_2 I_2 + L_2\frac{dI_2}{dt}.$$

Интегрируя это равенство от 0 до ∞ по времени, получим

$$R_1 Q_1 + L_1 I_1 |_0^\infty = R_2 Q_2 + L_2 I_2 |_0^\infty.$$

Так как $I_1(0) = I_2(0) = I_1(\infty) = I_2(\infty) = 0$, то $R_1 Q_1 = R_2 Q_2$, $Q_1 + Q_2 = Q$. Отсюда

$$Q_1 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}, \qquad Q_2 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}.$$

463. Примем за начало отсчета времени момент, когда лампа погасла. Напряжение на конденсаторе в этот начальный момент $V(0) = V_г$. До зажигания лампы процесс в цепи определяется уравнением

$$\mathscr{E} = V + RC\frac{dV}{dt}, \tag{463.1}$$

где V — напряжение на конденсаторе в момент времени t. Решение уравнения (463.1) будет

$$V(t) = \mathscr{E} - (\mathscr{E} - V_г)\exp\left\{-\frac{t}{RC}\right\}. \tag{463.2}$$

В момент времени $t = t_1$ неоновая лампа зажигается (рис. 254).

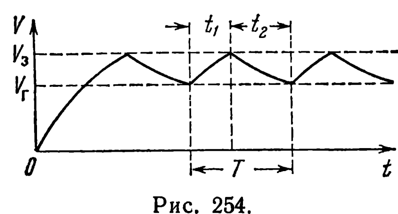


Рис. 254.

Следовательно, $V(t) = V_з$. Тогда из уравнения (463.2) получим

$$t_1 = RC\ln\frac{\mathscr{E} - V_г}{\mathscr{E} - V_з}. \tag{463.3}$$

После зажигания лампы ток, текущий через лампу (вследствие линейности ее характеристики) можно записать так: $I_1 = (V - V_0)/R_1$, где V_0 — напряжение, при котором продолжение характеристики пересекает ось V, а $R_1 = (V_г - V_0)/I_г$ — «эквивалентное

сопротивление» лампы. Тогда полный ток в цепи будет

$$I = I_1 + C\frac{dV}{dt} = \frac{V - V_0}{R_1} + C\frac{dV}{dt}. \qquad (463.4)$$

Когда лампа горит и через нее идет ток, уравнение цепи будет $\mathscr{E} = RI + V$. Подставляя сюда значение I из (463.4), получаем

$$\frac{\mathscr{E}}{R} + \frac{V_0}{R} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right) V + C\frac{dV}{dt}. \qquad (463.5)$$

Общим решением этого уравнения будет

$$V(t) = \left(\frac{\mathscr{E}}{R} + \frac{V_0}{R}\right)\frac{RR_1}{R + R_1} + A \exp\left\{-\frac{(R + R_1)\,t}{RR_1C}\right\}. \qquad (463.6)$$

Теперь за начало счета времени принимаем момент зажигания лампы, тогда $V(0) = V_0$. Определяем из этого условия постоянную A и подставляем в (463.6). Наконец, подставляем в полученное решение $V(t_2) = V_г$ и находим вторую часть периода:

$$t_2 = \frac{RR_1}{R + R_1} C \ln \frac{R(V - V_0) - R_1(E - V_з)}{R(V_г - V_0) - R_1(E - V_г)}.$$

Весь период $T = t_1 + t_2$.

464. 1) Вспыхивает при $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp V_з/V)$, гаснет при $\alpha = \frac{\pi}{2}(1 \mp V_г/V)$. 2) $V_{мин} = V_з$.

465. После замыкания ключа уравнение процесса в цепи будет

$$\mathscr{E} = L\frac{dI}{dt} + \frac{Rr}{R + r} I, \qquad (465.1)$$

где I — общий ток в цепи. В начальный момент $I_0 = \mathscr{E}/R$, а поэтому решение уравнения (465.1) запишется в виде

$$I = \frac{\mathscr{E}(R + r)}{Rr}\left(1 - \frac{R}{R + r}\exp\left\{-\frac{Rrt}{L(R + r)}\right\}\right).$$

Напряжение между точками A и B будет

$$V_{замык} = I\frac{Rr}{R + r} = \mathscr{E}\left(1 - \frac{R}{R + r}\exp\left\{-\frac{Rrt}{L(R + r)}\right\}\right).$$

Оно не может быть больше э. д. с. батареи. Подставляя числовые данные, получаем

$$V_{замык} = 24\,(1 - 0{,}99e^{-2{,}4t})\ \text{В}.$$

После размыкания ключа уравнение процесса в цепи будет

$$\mathscr{E} = L\frac{dI}{dt} + RI. \qquad (465.2)$$

Теперь в начальный момент $I_0 = \mathscr{E}(R+r)/(Rr)$. Решением уравнения (465.2) будет

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}\left(1 + \frac{R}{r}\exp\left\{-\frac{Rt}{L}\right\}\right),$$

а напряжение между точками A и B

$$V_{\text{размык}} = IR = \mathscr{E}\left(1 + \frac{R}{r}\exp\left\{-\frac{Rt}{L}\right\}\right)$$

может быть значительно больше э. д. с. батареи, если $R \gg r$. Подставляя числовые данные, получаем

$$V_{\text{размык}} = 24\,(1 + 99e^{-2400t})\ \text{В}.$$

В начальный момент напряжение будет 2400 В.

Настоящая задача позволяет уяснить процессы, происходящие при замыкании и размыкании цепи постоянного тока, обладающей сопротивлением и индуктивностью.

466. Уравнение процесса в цепи после размыкания ключа будет

$$\mathscr{E} = L\frac{dI}{dt} + V. \qquad (466.1)$$

Но $I = C\,dV/dt$. Начальные условия таковы: $V_0 = \mathscr{E}$, $I_0 = \mathscr{E}/r$. Поэтому решение уравнения (466.1) будет

$$V = \mathscr{E}\left(1 + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}\right).$$

Подставляя числовые данные, получим для максимального значения напряжения $V_{\text{макс}} = (\sqrt{10}\cdot 100 + 24)$ В. Увеличение емкости C ведет к снижению $V_{\text{макс}}$.

467. $I < RV\xi/\tau \approx 22$ мА.

§ 6. Переменный ток. Свободные и вынужденные колебания

468. Для зарядки аккумулятора существенно среднее значение силы тока $I_{\text{ср}}$, а электродинамический амперметр показывает ее эффективное значение $I_{\text{эфф}}$. Так как $I_{\text{ср}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} I_{\text{эфф}} \approx 0{,}9I_{\text{эфф}}$, то продолжительность зарядки будет $8/0{,}9 = 8{,}8$ ч.

469. $I_{\text{ср}} \approx 0{,}127$ А.

470. 1) $\approx 3{,}2$ А; 2) 5 А.

471. 1) 314 В; 2) 157 В.

472. Лампы пропускают ток попеременно через 1/2 периода. При этом конденсаторы заряжаются так, что разности потенциалов на них складываются. Если сопротивление нагрузки велико, то почти

весь ток за полпериода идет на зарядку конденсатора. Поэтому $V_{макс} \approx 2V_0$, где V_0 — амплитуда напряжения на CD.

473. 14,2 А.

474. $\mu \approx 2900$.

475. См. рис. 255.

476. Ток опережает по фазе напряжение на $\varphi = 88°$.

477. $R = 54{,}4$ Ом; $C \approx 100$ мкФ.

478. $\operatorname{tg}\varphi = \omega CR$.

479. $\alpha = \operatorname{arctg}\{L\omega/R\}$.

480. Когда плоскость рамки перпендикулярна к полю.

481. Когда плоскость рамки составляет с направлением поля угол $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\omega L - (1/\omega C)}{R}$.

482. $R = \sqrt{\dfrac{L}{C(1-\omega^2 LC)}}$.

483. $I_{макс} \approx 1{,}2$ А; $\varphi \approx 43°$; $N \approx 76$ Вт.

484. $N = (V^2 - V_1^2 - V_2^2)/2R$.

485. $N = (I^2 - I_1^2 - I_2^2)\,R/2$.

486. $N \approx 40$ мкВт.

Рис. 255.

487. 1) $I_1 = \dfrac{3\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$. 2) $I_2 = \dfrac{6\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$; токи противоположного направления.

488. В этом случае нельзя пренебрегать индуктивностью кольца L и сила тока определяется из соотношения $-L\,dI/dt = \mathscr{E}$. В зависимости от размеров и удельного сопротивления материала кольца и частоты питающей э. д. с. нужно учитывать только омическое или только индуктивное сопротивление кольца или и то, и другое.

489. $r = R/\sqrt{1 + R^2C^2\omega^2}$.

490. $L = CR^2$.

491. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 Q$, $r = \dfrac{L}{RC}$ $\left(Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}\right)$.

Решение. Найдем э. д. с. $\mathscr{E}$ источника. В отсутствие нагрузки

$$V_{C_0} = \mathscr{E}_0 \frac{1/(I\omega C)}{R + I\omega L + 1/(I\omega C)} = \frac{\mathscr{E}_0}{I\omega RC} = 0,$$

так как при резонансе $I\omega L + 1/(I\omega C) = 0$. Поскольку фазу колебаний эквивалентного источника определять не требуется, положим

$$\mathscr{E} = |V_{C_0}| = \frac{\mathscr{E}_0}{\omega RC} = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \mathscr{E}_0 Q,$$

где Q — добротность контура.

Найдем ток короткого замыкания цепи. Если закоротить выход, то ток в перемычке будет $I_{к.з}=\frac{\mathscr{E}_0}{I\omega L+R}\approx\frac{\mathscr{E}_0}{I\omega L}$. Внутреннее сопротивление эквивалентного источника будет $r=\frac{V_{C_0}}{I_{к.з}}=\frac{L}{RC}$.

492. Сдвиг фазы между токами $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{\omega R_1 C}$, т. е. от R_2 не зависит. С изменением сопротивления R_1 от нуля до ∞ сдвиг фазы изменяется от $\pi/2$ до нуля, причем ток через R_2 отстает по фазе от тока через R_1.

493.
$$\mathscr{E}=I_0\frac{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{C\omega}\sin(\omega t+\varphi);$$
$$I_1=\frac{I_0\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}{\omega^2 LC}\cos(\omega t+\varphi);\quad \operatorname{tg}\varphi=R\omega C.$$

494. $r=\frac{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2R^2C^2}}$; максимальное значение $r_{макс}\approx L/RC$ достигается при $\omega=1/\sqrt{LC}$.

495. Потому что при любом заряде на пластинах конденсатора разность потенциалов между ними равна нулю. В соответствии с этим в случае цепи переменного тока при коротком замыкании конденсатора его емкостное сопротивление $X_C=1/\omega C=0$, т. е. $C=\infty$.

496. $V_{вых}\approx[10\sin(300t-132^\circ)+3\sin(600t+207^\circ)]$ В.

497. $\mathscr{E}\approx150\cos(600t-78^\circ)$ В.

498. Уравнения для цепей трансформатора в комплексной форме:
$$\mathscr{E}=j\omega L_1I_1+j\omega MI_2,\quad 0=j\omega MI_1+j\omega L_2I_2+RI_2.\qquad(498.1)$$
Для трансформатора без рассеяния взаимная индуктивность $M=\sqrt{L_1L_2}$ и отношение $L_2/L_1=n^2$. Поэтому из уравнений (498.1) получаем $\mathscr{E}=\frac{j\omega L_1R}{j\omega L_1n^2+R}I_1=ZI_1$. Комплексное же сопротивление эквивалентной цепи (см. рис. 148, *б*) есть $Z=\frac{j\omega L_1R/n^2}{j\omega L_1+R/n^2}$.

499. 1) Нуль; 2) ток через сопротивление отстает по фазе на 90°; 3) сдвиг фазы $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega(L+CrR)}{r+R(1-\omega^2CL)}$, напряжение опережает э. д. с.

500. $\mathscr{E}^2_{эфф}=\frac{4}{T}\int\limits_0^{T/4}\left(\frac{4\mathscr{E}_0}{T}t\right)^2dt=\frac{\mathscr{E}_0^2}{3}$.

501. См. рис. 256.

502. $\omega\approx3{,}16\cdot10^6$ с$^{-1}$; $\theta=0{,}25$; $I_0\approx1{,}6$ А.

503. $C\approx50$ мкФ; $V_{макс}\approx628$ В.

504. $C \approx 20$ мкФ. Решим задачу в векторной форме. На рис. 257 OA — потеря напряжения на омическом сопротивлении (10 В), OB — потеря напряжения на катушке (62,8 В), OC — все напряжение (100 В), $OD \approx OC$, OE — потеря напряжения на конденсаторе (163 В). Отсюда

$$C = I/\omega V \approx 20 \text{ мкФ}.$$

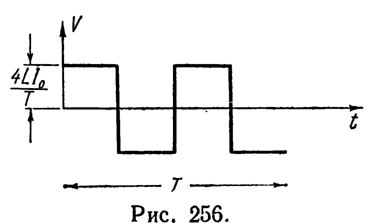


Рис. 256.

505. $C \approx 0{,}32$ мкФ.

506. В комплексной форме уравнения Кирхгофа обеих цепей будут:

$$\mathscr{E} = I\left[R + j\omega\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right)\right] + I' j\omega\left(M - \frac{1}{\omega^2 C}\right),$$

$$0 = I\left(M - \frac{1}{\omega^2 C}\right) + I'\left(L'' - \frac{1}{\omega^2 C}\right),$$

где I и I'' — токи в ветвях A и B соответственно. Из последнего уравнения следует: 1) если $\omega = 1/\sqrt{MC}$, то $I'' = 0$; 2) если $\omega = 1/\sqrt{LC}$, то $I = 0$.

Рис. 257.

Примечание. Такой случай оказался возможным только потому, что мы пренебрегли сопротивлением в цепи B.

507. 1) $I_0 \approx 0{,}8$ А; $N \approx 32$ Вт. 2) $I_0' = 2$ А; $N' = 0$.

508. 1) $N = \dfrac{\mathscr{E}_0^2 R}{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}$. 2) $C = 1/\omega^2 L$; $N_{\text{макс}} = \mathscr{E}_0^2/R$.

509. $N = \dfrac{\mathscr{E}^2 (R + R_0)}{\omega^2 (L + L_0)^2 + (R + R_0)^2}$;

$$N' = \frac{\mathscr{E}^2 R}{\omega^2 (L + L_0)^2 + (R + R_0)^2}; \quad \eta = \frac{R}{R + R_0}.$$

Примечание. Как видим, η не зависит от индуктивности цепи, но мощность, которую может дать источник при заданном напряжении $\mathscr{E}$, уменьшается с увеличением L и L_0.

510. $N = \dfrac{\mathscr{E}_0^2 [R + (1 + \alpha^2) r]}{2[(r + R)^2 + \alpha^2 r^2]}$;

$$N' = \frac{\mathscr{E}_0^2 R [R + (1 + \alpha^2) r]}{2[(r + R)^2 + \alpha^2 r^2][R + (1 + \alpha^2) r]};$$

$$\eta = \frac{R}{R + (1 + \alpha^2) r}, \text{ где } \alpha = \omega RC.$$

Примечание. В отличие от предыдущей задачи, в данном случае с увеличением α понижается и мощность N, отдаваемая источником, и к.п.д. установки η.

511. Амплитуда э.д.с. источника $\mathcal{E}_0 = \sqrt{3} \cdot 120$ В; $\eta = 1/3$; $\eta' = 1/2$.

512. Амплитуда э.д.с. источника $\mathcal{E}_0 \approx 140$ В.

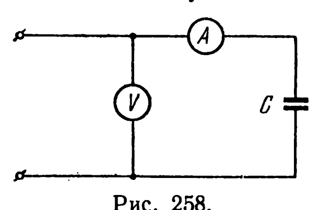


Рис. 258.

513. Схема приведена на рис. 258. $C = \frac{I}{\omega V}$ Ф, где I — в амперах, V — в вольтах, ω — угловая частота питающего тока.

514. $C \approx 6,3$ мкФ.

515. Сопротивление утечки конденсатора должно быть значительно больше, чем его емкостное сопротивление для 50-периодного тока.

516. Вначале определить сопротивление утечки R с помощью измерения на постоянном токе, а затем общее сопротивление Z на переменном токе. $Z = R/\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}$. Зная R и Z находим C.

517. $C_x/C_1 = AD/DB$. Можно.

518. Можно, если $\omega^2 = 1/C_1L_1 = 1/C_2L_2$. В самом деле, если прибор G остается на нуле, то напряжения в точках A и B соответственно равны

$$\frac{V\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1}+j\omega L_2} = \frac{V}{1-\omega^2 C_1 L_2}, \quad \frac{Vj\omega L_1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{V}{1-\frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}}$$

и, значит,

$$\omega^2 C_1 L_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1 C_2}, \quad \text{или} \quad \omega^4 C_1 C_2 L_1 L_2 = 1.$$

Отсюда получается ответ.

519. 1) $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2RC\omega}{1-R^2C^2\omega^2}$. 2) $\varphi = \pm\pi/2$.

520. $C \approx 15$ мкФ.

521. $L = 2,3$ Г; первый конденсатор не влияет на отношение амплитуд на выходе и на входе.

522. Трансформатор потребляет заметную мощность только в то время, когда нажата кнопка. Когда кнопка не нажата, в первичной цепи трансформатора течет малый ток «холостого хода»

$$I_{\text{х. х}} = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}},$$

где $\mathcal{E}$ — подводимое напряжение, R — сопротивление первичной обмотки, L — ее индуктивность и ω — круговая частота тока. Но при

$\omega L \gg R$ трансформатор при токе «холостого хода» почти не потребляет энергии («безваттный ток»). Кнопку включают во вторичную цепь, чтобы не подводить к ней высокого напряжения.

523. $L = 7$ Г

524. Первичная — 200 витков, вторичная — 6600 витков.

Указание. Э.д.с., индуцируемая в одном витке, одинакова во всех обмотках трансформатора.

525. 1) $L \approx 0{,}3$ Г; 2) $V \approx 3760$ В.

526. $\dfrac{N}{N_0} = \dfrac{(1+n)(1+2n^2)}{1+4n^2} = 13{,}1$, где N_0 — мощность при разомкнутой, а N — при замкнутой цепи.

527. $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{n_1}{1+n_2(n_1+n_2)}$. При $n_1 = n_2 = 10$ $\delta = -3°$. Ток отстает по фазе от напряжения.

528. $I \approx \dfrac{\mathcal{E} S\omega a}{4\pi d_0}\sin\omega t$.

529. $\varphi_{\text{макс}} = \dfrac{1}{1-e^{-\delta T/2}}\dfrac{q}{B}$.

531. $\omega L = R$; $|V_{\text{вх}}/V_{\text{вых}}| = 3$.

532. $C = 320$ пФ.

533. $C = 0{,}1$ мкФ.

534. 1) $R \approx 6370$ Ом; 2) $R \approx 3185$ Ом или $R \approx 12\,740$ Ом.

535. 4/3 радиуса.

536. 1) Вычерчивают координатные оси на экране трубки (рис. 259). Для этого вначале включают только I_1 и отмечают величину и положение оси a—a', затем включают только I_2 и отмечают величину и положение оси b—b'. Вычерчивают прямоугольник и, включив оба тока I_1 и I_2, наносят эллипс, описываемый пятном на экране. (Все это можно сфотографировать.) Тогда $Oc/Oa' = \cos\varphi$ и $Od/Ob' = \sin\varphi$, где φ (или $180° - \varphi$) — сдвиг фазы.

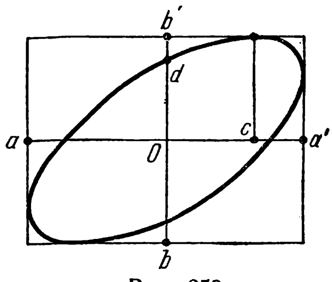


Рис. 259.

2) Нельзя.

537. $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)$,

где α — угол наклона большой оси эллипса, a и b — большая и малая полуоси эллипса.

538. Необходимо знать: 1) чувствительность катодного осциллографа (отклонение луча в зависимости от напряжения); 2) величину сопротивления R. Замыкая K_1, измеряем подводимое напряжение. Замыкая только K_2, измеряем падение напряжения на известном сопротивлении R и находим силу тока. Затем, включая

оба ключа, получим эллипс, по параметрам которого легко установить сдвиг фазы. Зная подводимое напряжение, силу тока в цепи и сдвиг фазы между ними, находим мощность.

539.

$$R_1=\frac{r_{12}r_{13}}{r_{12}+r_{13}+r_{23}},\quad R_2=\frac{r_{12}r_{23}}{r_{12}+r_{13}+r_{23}},\quad R_3=\frac{r_{13}r_{23}}{r_{12}+r_{13}+r_{23}}.$$

540. $V=\frac{m}{e}\frac{lLa\omega^3}{R}\varphi_0\sin\omega t$, где m — масса, e — заряд электрона.

541. $m\approx 17$ г.

542. 120° или 240°.

543. 1) Не изменятся; 2) закручивание происходит в другую сторону. 3) Нельзя.

544. $I=(6-5e^{-50t})$ А.

545. $I=\left(1+10e^{-2\cdot 10^{-5}t}\right)$ А; см. рис. 260.

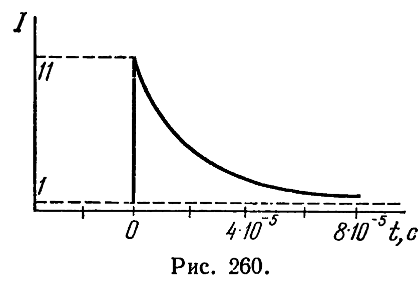


Рис. 260.

546. $I=\frac{0{,}05}{7}\sin\omega t$ А; $\omega=\frac{2}{7}\cdot 10^4$ с$^{-1}$.

547. $V=5(1-e^{-4\cdot 10^4 t})$ В.

548. $I=\frac{\mathscr{E}}{R}\left(1+\frac{L_1-L_2}{L_2}e^{-t/\tau}\right)$; $\tau=L_2/R$.

549. $V\approx 6{,}3e^{-250t}\times\sin 660t$ В.

550. $q=\frac{\mathscr{E}C}{2}\left[1-\left(\cos\omega_1 t+\frac{\delta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)e^{-\delta t}\right]$, где $\delta=r/4L$, $\omega_1=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{r^2}{16L^2}}$.

551. $I=\left[\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{2}}{5}e^{-2000t}\sin(2000t+45°)\right]$ А.

552. $V\approx 20\left(\cos 20\pi t-\cos\frac{100}{35}t\right)$ мВ.

553. $I=\frac{1}{\pi}(1-\cos 100\pi t)$ А. Как видно, ток в цепи будет не переменный, а пульсирующий. Этот результат объясняется тем, что мы пренебрегли омическим сопротивлением цепи и специально выбрали начальную фазу включения э.д.с. Постоянная составляющая тока, возникающая в начальный момент, не затухает, а будет циркулировать все время и сложится с переменной составляющей. В реальной схеме, обладающей сопротивлением, постоянная составляющая будет отсутствовать и установившийся ток будет переменным. Для выяснения роли сопротивления полезно разобрать

включение данной в условии э.д.с. на катушку с сопротивлением R и, получив ответ, перейти к пределу $R=0$ (см. задачу 564).

554. $V=\mathscr{E}\left[1-e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t+\frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$, где $\gamma=\frac{R}{2L}$ и $\omega=\sqrt{LC-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. Минимальное напряжение, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2\mathscr{E}$.

555. $I=\frac{\mathscr{E}}{r}\left[1-e^{-\gamma t}\left(\cos\omega t+\frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$. Обозначения такие же, что и в задаче 554.

556. 1) $I_{\text{эфф}}=\frac{V}{4\pi\nu a\ln(a/b+1)}=0{,}028$ СГСМ $=0{,}28$ А.

2) Напряжение на лампочке уменьшится в

$$\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\Big/\ln\frac{(a+b)^2}{b(b+2a)}\approx 2 \text{ раза.}$$

557. $V(t)=V_0e^{-\gamma t}\left[\cos\omega t+\left(\frac{1}{\omega RC}+\frac{\gamma}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$, где $\omega^2=\omega_0^2-\gamma^2$, $\omega_0^2=1/(LC)$, $\gamma=R/(2L)$.

558. Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

559. $I=\frac{\mathscr{E}_0}{R^2+\omega^2L^2}[R\cos(\omega t+\delta)+\omega L\sin(\omega t+\delta)-$
$-e^{-Rt/L}(R\cos\delta+\omega L\sin\delta)]$.

560. Амплитуды на входе и выходе одинаковы. Сдвиг фазы выходного напряжения относительно входного определяется формулой $\operatorname{tg}\delta=\frac{2\omega RL}{\omega^2L^2-R^2}$.

561. Решение. При выполнении условия квазистационарности (рис. 261)

$$L\frac{dI}{dt}+V=0,\quad Q=CV,\quad \dot{Q}=I-I',\quad V=RI'.$$

Исключая Q, I и I', отсюда находим

$$\ddot{V}+2\gamma\dot{V}+\omega_0^2V=0,$$

где $\omega_0^2=1/(LC)$, $\gamma=1/(2RC)$.

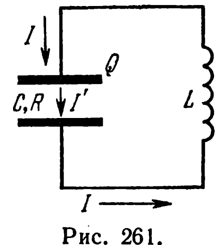


Рис. 261.

562. $F=\frac{6\pi^4\omega^2Lr^8I_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\frac{1}{l^7}$. Сила — отталкивающая. Если $\omega L\gg R$, то $F\approx\frac{6\pi^4r^8I_0^2}{L}\frac{1}{l^7}$. В другом предельном случае $\omega L\ll R$ и $F\approx\frac{6\pi^4\omega^2Lr^8I_0^2}{R^2}\frac{1}{l^7}$.

563. $I=0{,}5\cos 200\pi t$ А, $V\approx 104\,(\cos\sqrt{10}\cdot 1000t-\cos 200\pi t)$ В.

Таким образом, собственные колебания напряжения на конденсаторе, возникающие после включения, не затухают, несмотря на наличие сопротивления R, и не влияют никак на силу тока через R, так как внутреннее сопротивление источника предположено равным нулю. Следовательно, источник «замыкает накоротко» сопротивление, напряжение на котором будет всегда равно э.д.с. источника. В реальной схеме, в которой источник всегда обладает внутренним сопротивлением, собственные колебания затухают и остаются одни вынужденные колебания.

564. $V=\dfrac{100}{\sqrt{2}}\cos\left(100\pi t-\dfrac{\pi}{4}\right)-50e^{-314t}$ В.

565. $R=\dfrac{3}{2}\,\dfrac{R_2^2-5R_1^2}{R_2-R_1}=137$ Ом, $\quad L=\dfrac{1}{2\pi\nu}\sqrt{16R_1^2-(R_1+R_2)^2}=$ $=1{,}16$ Г, где $R_1=110$ Ом и $R_2=275$ Ом — сопротивления первой и второй лампочек соответственно.

566. Решение. Пусть параметры цепочки таковы, что при наложении синусоидального напряжения в ней устанавливается синусоидальный ток. Тогда можно пользоваться понятием импеданса. Если удалить первые два звена цепочки Z_1 и Z_2, то останется такая же бесконечная цепочка. Ее можно заменить одним звеном с импедансом Z. Тогда получится схема, изображенная на рис. 262. Импедансы Z и Z_2 соединены параллельно, их результирующий импеданс

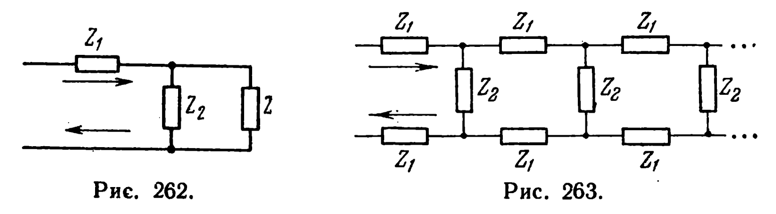


Рис. 262. Рис. 263.

$ZZ_2/(Z+Z_2)$ соединен последовательно с импедансом Z_1. В результате должен получиться импеданс Z, т. е.

$$Z=Z_1+\frac{ZZ_2}{Z+Z_2},\quad \text{откуда}\quad Z=\frac{Z_1}{2}+\sqrt{\frac{Z_1^2}{4}+Z_1Z_2}.$$

Знак плюс перед квадратным корнем означает, что из двух значений корня следует брать то, которое имеет положительную вещественную часть. Действительно, квадратный корень есть не что иное, как импеданс Z' бесконечной цепочки, изображенной на рис. 263, а во всякой реальной системе активная часть комплексного сопротивления должна быть положительной.

567. Решение. Полагая в предыдущей задаче $Z_1 = iX_1$, $Z_2 = iX_2$, получим

$$Z = \frac{1}{2}\left(iX_1 \pm \sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2)}\right).$$

Если $4X_1X_2 + X_1^2 < 0$, т. е. подкоренное выражение положительно, то импеданс Z будет содержать вещественную часть, а потому цепь будет потреблять или отдавать энергию в зависимости от знака этой вещественной части. Стационарное состояние в этом случае невозможно, а решение, полученное в предыдущей задаче, неприменимо. Для решения необходимо использовать начальные условия.

Синусоидальный ток в цепочке возможен только при выполнении условия $4X_1X_2 + X_1^2 \geqslant 0$. Только тогда можно пользоваться понятием импеданса и решением предыдущей задачи. Вопрос сводится к выбору знака перед квадратным корнем. Для этого предположим, что импеданс Z_1 содержит малое омическое сопротивление R_1, и перейдем к пределу $R_1 \to 0$. Полагая $Z_1 = iX_1 + R_1$, $Z_2 = iX_2$, из решения предыдущей задачи получим

$$Z' = \frac{1}{2}\sqrt{-(4X_1X_2 + X_1^2) + 2iR_1(X_1 + 2X_2)},$$

где $Z' = Z - Z_1/2$ — импеданс бесконечной цепочки, изображенной на рис. 263. При извлечении квадратного корня пренебрежем квадратами R_1. В этом приближении

$$Z' = \frac{i}{2}\left[\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2} - i\,\frac{R_1(X_1 + 2X_2)}{\sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}}\right].$$

Знак надо выбрать так, чтобы вещественная часть этого выражения была положительна. Так как $R_1 > 0$, то в случае $X_1 + 2X_2 > 0$ надо взять знак плюс, а в случае $X_1 + 2X_2 < 0$ — минус. Полагая $R_1 = 0$, окончательно находим

$$Z = \begin{cases} \frac{i}{2}\left[X_1 + \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}\right], & \text{если } X_1 + 2X_2 > 0, \\ \frac{i}{2}\left[X_1 - \sqrt{4X_1X_2 + X_1^2}\right], & \text{если } X_1 + 2X_2 < 0. \end{cases}$$

Например, если цепочка составлена только из катушек индуктивности, то $X_1 > 0$, $X_2 > 0$ и перед корнем надо взять знак плюс. В этом случае ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$. Если же цепочка состоит только из конденсаторов, то $X_1 < 0$, $X_2 < 0$, так что годится только знак минус. В этом случае фаза тока опережает фазу напряжения на $\pi/2$.

568. $Z = Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_1Z_2}$.

569. Решение. Электрическая энергия (в гауссовой системе):

$$W_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{2dI_0^2 \sin^2 \omega t}{\varepsilon \omega^2 R^2}.$$

Магнитное поле внутри конденсатора создается током смещения. На расстоянии r от оси конденсатора оно найдется из соотношения

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} I_{\text{см}} = \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r}{R}\right)^2 I,$$

откуда

$$H = \frac{2r}{cR^2} I = \frac{2r}{cR^2} I_0 \cos \omega t.$$

Магнитная энергия, локализованная в конденсаторе:

$$W_m = \frac{\mu}{8\pi} \int H^2 \, dV = \frac{\mu d \cdot I_0^2 \cos^2 \omega t}{4C^2}.$$

Отношение максимальных энергий:

$$\frac{W_m^{\text{макс}}}{W_e^{\text{макс}}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2C}\right)^2 \approx 0{,}5 \cdot 10^{-14}.$$

570.

$$W_m = \frac{2\pi^2 \mu R^2 N^2}{c^2 l} I_0^2 \cos^2 \omega t, \quad W_e = \frac{\varepsilon \mu^2 \pi^2 \omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l} I_0^2 \sin^2 \omega t,$$

$$\frac{W_e^{\text{макс}}}{W_m^{\text{макс}}} = \frac{\varepsilon\mu}{2} \left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15}.$$

571. 1) Увеличится в 5/3 раза. 2) Уменьшится в три раза.

572. $H_0 = \frac{\varepsilon\omega}{c} \frac{V_0 r}{2d}$. Для воздушного конденсатора $H_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ Э. Для конденсатора, заполненного средой, $H_0 = \varepsilon H_{0\,\text{вак}} = 5 \cdot 10^{-4}$ Э. $B_0 = \mu H_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ Гс.

573. 1) Концентрические окружности с центрами, расположенными на оси соленоида. 2) $E = \frac{2\pi r_0^2 n}{rc^2} \dot{I} = \frac{\pi r_0}{c} \frac{n\dot{I}}{c} \approx 10^{-8}$ СГСЭ $\approx 3 \times 10^{-4}$ В/м. 3) E не изменится, а D возрастает в $\varepsilon = 2$ раза.

574. $I = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \sin\left(250\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8} e^{-250t}$ А.

575. $Q_1 = \frac{CV}{2}(1 + \cos \omega t)$ на том конденсаторе, который был заряжен. $Q_2 = \frac{CV}{2}(1 - \cos \omega t)$ на втором; $\omega = \sqrt{2/LC}$.

576. $L \approx 1$ Г.

577. $T \approx 58 \cdot 10^{-6}$ с.

578. $\lambda \approx 126$ км.

579. $C \approx 110$ пФ.

580. $I_0 = V_0/\sqrt{L/C}$; величина $\sqrt{L/C}$ носит название «характеристического» или «волнового сопротивления» контура.

581. $f \approx 5000\ c^{-1}$.

582. $\Delta\omega/\omega_0 \approx 1/\pi\%$.

583. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$ при параллельном включении; $R = R_1 + R_2$, $L = L_1 + L_2$ при последовательном включении.

584. Конденсатор включается для того, чтобы исключить возможность возникновения заметного тока от сети через цепи приемника на землю. Емкость такого конденсатора должна быть приблизительно равна нормальной емкости антенны (200—300 см), чтобы включение этого конденсатора не изменило существенно диапазона волн, на которые можно настроить радиоприемник.

585. $R \approx 40$ Ом.

586. Приблизительно через 12 периодов.

587. Коэффициент затухания характеризует время, за которое амплитуда колебаний в контуре уменьшится в e раз. Логарифмический декремент контура характеризует число периодов, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

588. $I_0 = nI_0'$.

589. $I = \frac{V_0 \omega C (1 - \omega^2 LC)}{2\omega^2 LC - 1} \sin \omega t$; $I_{\text{мин}} = 0$ при $\omega^2 = 1/(LC)$, $I_{\text{макс}} = \infty$ при $\omega^2 = 1/(2LC)$.

590. $r = \frac{X^2}{R^2 + X^2} R$, $x = \frac{R^2}{R^2 + X^2} X$.

591. $I = \frac{\Phi_0}{L} \cos \omega_0 t$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

592. $R = V_0/I_0 = 10$ Ом; $\tau = 2L/R = 0{,}2$ с.

593. Энергия уменьшится в два раза; $\tau = 1/(2\pi\,\Delta\nu) = 1/2\pi = 0{,}16$ с.

594. $\omega_{\text{рез}} = 1/\sqrt{(L_1 - M^2/L_2)\,C}$. Резонанс недостижим, если $M^2 = L_1 L_2$.

595. Решение. По закону Ома $I = \mathscr{E}/(R + r)$. До включения батареи магнитный поток через сверхпроводящий контур был равен нулю. Он сохранится таковым и после включения тока, т. е. $L_1 I_1 - L_2 R_2 = 0$, откуда $I_1/I_2 = L_2/L_1$. Присоединив сюда уравнение $I_1 + I_2 = I$, найдем токи I_1 и I_2 в отдельности.

596. $4L/R = 2 \cdot 10^{-5}$ с.

597. 2400 мкГ; 400 мкГ.

598. Соединить катушки последовательно и измерить их индуктивность L_1, затем переменить концы у одной катушки и снова измерить индуктивность L_2. Тогда $M = (L_1 - L_2)/4$.

599. При малых частотах напряжение на индуктивности близко к нулю, на емкости почти равно э. д. с.; при больших частотах наоборот.

600. $I = \frac{\mathscr{E} RC\omega}{\sqrt{L^2\omega^2 + R^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-R}{L\omega}$.

601. Сила тока останется без изменения. Резонансная частота возрастает в $\sqrt{2}$ раз.

602. При резонансе мощность, расходуемая источником э. д. с., равна $N = \frac{\mathscr{E}^2 R}{L^2\omega^2 + R^2}$. Если $L\omega \gg R$, то с увеличением L вдвое мощность упадет в четыре раза.

603. Указание. Преобразовать обычную формулу для амплитуды силы тока в контуре $I = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + [L\omega - (1/\omega C)]^2}}$, подставив в нее $I_0 = \mathscr{E}/R$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ и частоту внешней силы $\omega = 2\pi (f_0 + \Delta f)$. Пренебречь квадратами и более высокими степенями $\Delta f/f_0$.

604. Декремент и коэффициент затухания возрастут в два раза, сила тока в контуре не изменится, а напряжение на конденсаторе уменьшится вдвое.

605. $Q = \frac{1}{2\pi f_{\text{рез}} RC} \approx 50$.

606. $Q = 30$.

607. $M = \frac{\omega^2 S^2 L H_0 \cos\varphi}{2(R^2 + \omega^2 L^2)} [\boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{n}]$. Возможны два положения равновесия: 1) плоскость кольца перпендикулярна к магнитному полю (неустойчивое равновесие); 2) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие). При $\omega L \gg R$

$$M \equiv M_1 \approx \frac{H_0^2 S^2}{2L} \sin\varphi \cos\varphi.$$

При $\omega L \ll R$

$$M \equiv M_2 = \frac{\omega^2 H_0^2 S^2 L}{2R^2} \sin\varphi \cos\varphi = M_1 \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2.$$

Во втором случае вращающий момент меньше.

608. $\frac{e}{m} = \frac{8V}{d^2 B^2} \sin^2\alpha = 1{,}78 \cdot 10^7$ СГСМ.

609. Добротность контура должна быть $Q > 100$, т. е. логарифмический декремент контура менее 3%.

610. $\approx 0{,}2\%$.

611. См. рис. 264 (*а* — линия без потерь; *б* — линия с конечным сопротивлением проводов). При наличии сопротивления проводов существует падение напряжения вдоль проводов, а значит, на поверх-

ности проводов и в пространстве между проводами существует тангенциальная составляющая вектора $\boldsymbol{E}$, вследствие чего вектор Умова—Пойнтинга отклонен в сторону проводов. Часть энергии течет к нагрузке, а часть втекает в провода и превращается в тепло.

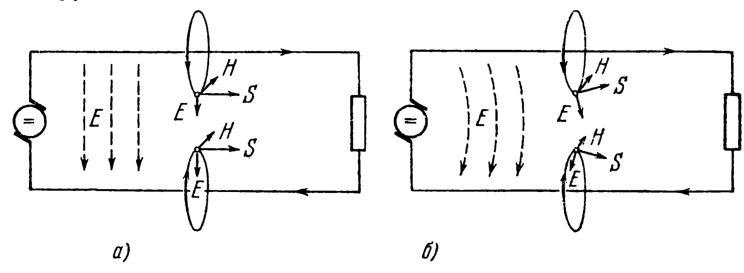


Рис. 264.

612. Так как $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ одновременно меняют свое направление, то вектор $\boldsymbol{S}$ не изменяет направления.

613. Так как моменты изменения направлений векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ на обратные сдвинуты между собой на четверть периода, то вектор $\boldsymbol{S}$ каждые четверть п риода меняет свое направление на обратное. Действительно, в этом случае

$$\int_0^T \frac{EH}{4\pi}\,dt = \int_0^T \frac{1}{4\pi}\,E_0 \sin\omega t \cdot H_0 \cos\omega t\,dt = 0.$$

Энергия колеблется в отдельных участках провода, но не течет в одном направлении (стоячие волны).

614. 1) См. рис. 265; 2) $S\cdot 2\pi r l = \frac{1}{4\pi}\,EH\cdot 2\pi r l = \frac{1}{4\pi}\,\frac{V}{l}\,\frac{2I}{r}\,2\pi r l = VI.$

615. 1) $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} = 0;$

2) $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{Vu}{d^2}$.

3) Изменится знак тока смещения.

Рис. 265.

616. $I = I_0 l / l_0$, где l — мгновенная длина соленоида.

617. $H = 0$.

618. Решение. Если σ — поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = \dot{\sigma}$. Следовательно, $j_{\text{полн}} = j + j_{\text{см}} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

619. Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint H\,dl = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}(I + I_{см}),$$

где $I_{см} = Ir^2/R^2$ — ток смещения, пронизывающий круг радиуса r. В результате получим

$$H = \frac{2I}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

620. $H = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd} V_0 \cos \omega t$, где r — расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

621. Поток энергии равен нулю (см. задачу 619).

622. Поток электрической энергии вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

623. Решение. Ввиду осевой симметрии полный электромагнитный импульс поля равен нулю. В результате разрядки конденсатора он измениться не может. Поэтому не может измениться и полный механический импульс системы. Но в результате разрядки электромагнитный импульс, локализованный в конденсаторе, уменьшается на $\frac{V}{4\pi c}[EH]$, а электромагнитный импульс поля вне конденсатора увеличивается на такую же величину. В соответствии с этим конденсатор приобретает механический импульс $\frac{V}{4\pi c}[EH]$, равный $\sim 10^{-4}$ г·см/с. Соленоид получит такой же, но противоположно направленный импульс. Искру можно рассматривать как ток проводимости. Если бы все электрическое поле конденсатора было локализовано только внутри него, то магнитное поле искры вне конденсатора было бы полностью компенсировано магнитным полем тока смещения (см. задачу 619). На самом деле часть тока смещения проходит вне конденсатора и создает там магнитное поле. Это магнитное поле действует на токи, текущие в соленоиде, и меняет импульс последнего.

624. Так же, как в предыдущей задаче.

§ 7. Электрический ток в жидкостях

625. Будет двигаться против часовой стрелки, если глядеть сверху.

626. Количество отложившихся веществ соответствует 1 Кл на аноде и 1 Кл на катоде, так как за 1 с к катоду не только подхо-

дят положительные ионы с зарядом 0,5 Кл, но от него уходят отрицательные ионы с зарядом 0,5 Кл, и, следовательно, у катода освобождается еще столько же положительных ионов, заряд которых равен 0,5 Кл.

627. $\approx 26{,}8$ А·ч.

628. $e/m_H = 2{,}870 \cdot 10^{14}$ СГСЭ.

629. $m_H = 1{,}67 \cdot 10^{-24}$ г; $e = 4{,}80 \cdot 10^{-10}$ СГСЭ.

630. $Q \approx 4$ мг.

631. $I = 4{,}5$ А.

632. В рассуждениях упущено следующее принципиальное обстоятельство. При выделении вещества на электродах электролитической ванны возникает поляризация электродов, в результате которой появляется обратная э.д.с. (Это явление аналогично явлению возникновения э.д.с. в аккумуляторах при их зарядке.) При последовательном включении нескольких банок с подкисленной водой обратная э.д.с., складываясь, достигает в конце концов значения э.д.с. аккумуляторной батареи раньше, чем от нее будет взято количество электричества, которое она может отдать, и ток прекратится.

633. $\mathcal{E} \approx 1{,}06$ В.

634. Анионом перенесено $Q\frac{u}{u+v}$, катионом перенесено $Q\frac{v}{u+v}$ единиц количества электричества.

635. Приблизительно в 2,5 раза.

636. 0,844 и 0,156.

637. $k \approx 0{,}473$.

638. $k \approx 0{,}497$.

639. Взаимодействием катиона с электролитом, в результате чего образуется соединение, содержащее вещество катиона и являющееся в растворе анионом. В данном случае при электролизе CdI_2 ионами будут $^1/_2Cd$ и $^1/_2(CdI_2 + I_2)$.

640. $A = Q\frac{vRT}{(u+v)\,nF}\ln\frac{c_1}{c_2}$, где F — число Фарадея, n — валентность.

641. Путь решения вытекает из предыдущей задачи.

642. $k = \frac{RT}{nF}u$, где F — число Фарадея, R — газовая постоянная, n — число грамм-эквивалентов иона в единице объема, или валентность иона.

643. Процессы, происходящие при зарядке и разрядке кислотного аккумулятора, могут быть представлены следующей химической

формулой:

$$PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4 \underset{\text{зарядка}}{\overset{\text{разрядка}}{\rightleftarrows}} 2PbSO_4 + 2H_2O.$$

Отсюда следует, что плотность электролита возрастает за счет H_2SO_4.

644. $K = A/F = 1{,}18 \cdot 10^{-8}$ г/Кл.

645. $K_{Cu} = \frac{\nu_{Ag}}{\nu_{Cu}} \frac{A_{Cu}}{A_{Ag}} K_{Ag} = \frac{1}{2} \frac{A_{Cu}}{A_{Ag}} K_{Ag} = 0{,}328 \cdot 10^{-8}$ г/Кл, где ν — валентность.

646. $\Lambda_\infty = F(b^+ + b^-) = 109$ см²/(Ом·г-экв).

647. $\eta = \frac{m}{A_{Na} + A_{Cl}} = 1{,}71 \cdot 10^{-3}$ г/(г-экв·см³); $\Lambda = 1/(\rho\eta) = 70$ см²/(Ом·г-экв); $\alpha = \Lambda/\Lambda_\infty = 0{,}64$.

648. Решение. Эквивалентная проводимость воды при стопроцентной диссоциации $\Lambda_\infty = F(b^+ + b^-) = 488$ см²/(Ом·г-экв). Эквивалентная концентрация $\eta = m/M$, где $m = 1$ г — масса кубического сантиметра воды, M — относительная молекулярная масса воды. Эквивалентная проводимость реальной воды $\Lambda = \lambda/\eta = 6{,}8 \cdot 10^{-7}$ см²/(Ом·г-экв). Степень диссоциации $\alpha = \Lambda/\Lambda_\infty = 1{,}4 \cdot 10^{-9}$. Столь ничтожная степень диссоциации не позволяет осуществить разложение чистой воды путем электролиза. Для этого воду надо предварительно сделать проводящей, добавив к ней, например, серную кислоту.

§ 8. Термоэлектричество

649. $8 \cdot 10^{-5}$ А.

650. $C = 5 \cdot 10^{-5}$ В/°С.

651. $T_1 = 1015$°С.

652. 1) $V = \frac{A_2 - A_1}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{P_1}{P_2}$. 2) $V_1 - V_2 = \frac{k(T_1 - T_2)}{e} \ln \frac{P_1}{P_2}$.

§ 9. Электроника

653. $v \approx 59{,}5 \cdot 10^7$ см/с.

654. $v \approx 0{,}7 \cdot 10^{-4}$ см/с.

655. $V = IB/(can)$, где c — скорость света.

656. $\varphi_{вых} = 300 \left[\frac{2RI_н \Delta I_н}{I} - \frac{2kT}{e} \right]$.

Решение. Если T — температура накала нити лампы, по сравнению с которой можно пренебречь температурой провода, по которому электроны возвращаются к нити, то средняя кинетическая энергия эмиттированного электрона (по Ричардсону), которая те-

ряется нитью, равна $2kT$, где k — постоянная Больцмана. Кроме того, нить теряет энергию, расходуемую на совершение работы выхода, т. е. $\frac{1}{300}\varphi_{вых}e$, где $\varphi_{вых}$ — работа выхода, выраженная в вольтах, а e — заряд электрона. Если I — эмиссионный ток, то за секунду вылетает I/e электронов, а потому нить теряет в секунду количество энергии, равное $I\left(\frac{\varphi_{вых}}{300}+\frac{2kT}{e}\right)$. Вследствие потери этой энергии приходится ток накала $I_н$ увеличить на $\Delta I_н$, чтобы не снизилась температура нити. Повышение тока накала нити на $\Delta I_н$ выделит дополнительно энергию $2RI_н\Delta I_н$, где R — сопротивление нити накала. Эта дополнительная энергия компенсирует все потери энергии нити, а потому имеем уравнение

$$I\left(\frac{\varphi_{вых}}{300}+\frac{2kT}{e}\right)=2RI_н\Delta I_н.$$

Отсюда получается ответ.

657. $V=V_н+\frac{N}{IV_а}\varphi_{вых}=8{,}108$ В.

658. Со скоростью от 56 до 60 В вследствие неэквипотенциальности нити лампы, вдоль которой есть падение напряжения 4 В. Такое распределение скоростей будет иметь место, если анодный ток мал по сравнению с током накала, что обычно имеет место.

659. Конечная скорость электронов у анода лампы останется той же, так как электроны в обоих случаях пройдут одну и ту же разность потенциалов. Однако значения скоростей электронов в промежуточных точках их пути между катодом и анодом будут в обоих случаях различными, так как переключение сетки вызовет изменение распределения потенциалов в электрическом поле внутри лампы,

660. Решение. Под действием силы тяжести свободные электроны в металле будут опускаться вниз. Вследствие этого верхняя поверхность тела зарядится положительно, а нижняя — отрицательно. В металле возникнет электрическое поле E, направленное вниз, т. е. препятствующее дальнейшему опусканию электронов. Опускание прекратится, когда $mg+eE=0$, т. е. когда электрическое поле уравновесит силу тяжести (m — масса, e — заряд электрона). Так как поле E однородно, то объемных зарядов в металле не возникнет, как это следует из уравнения $\operatorname{div}E=4\pi\rho$. Если пренебречь деформацией решетки под действием силы тяжести, то следует пренебречь и изменением скачка потенциала вдоль поверхности металла на границе с полостью. Тогда тангенциальные составляющие вектора E на границе с полостью будут непрерывны и в полости установится такое же равновесное электрическое поле, как и в металле, т. е. $E=-mg/e$. Так как $e<0$, то это поле будет направлено вниз и

равно $E=1{,}9\cdot10^{-15}$ СГСЭ$=5{,}7\cdot10^{-11}$ В/м. В полости поле $\boldsymbol{E}$ уравновесит силу тяжести, действующую на электрон, и ускорение последнего будет равно нулю. Если на место электрона в полость поместить позитрон, то на него будет действовать сила $m\boldsymbol{g}-e\boldsymbol{E}=2m\boldsymbol{g}$ и эта частица получит ускорение $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{g}$, направленное вниз.

661. Решение. Задача сводится к предыдущей, если перейти к неинерциальной системе отсчета, движущейся с ускорением $\boldsymbol{a}$. В неинерциальной системе отсчета появится сила инерции $-m\boldsymbol{a}$, действие которой эквивалентно действию силы тяжести той же величины и направления. Поэтому, используя решение предыдущей задачи, найдем, что в полости возникнет электрическое поле $E = ma/e \approx 5{,}7\cdot10^{-13}$ В/см. Относительное ускорение $\boldsymbol{a}_{\text{отн}}$ электрона будет нуль, а позитрона $-2\boldsymbol{a}$. Абсолютное ускорение найдется по формуле $\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}_{\text{отн}}$. Для электрона $\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{a}$, для позитрона $\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=-\boldsymbol{a}$. Таким образом, абсолютные ускорения электрона и позитрона будут равны по величине, но противоположны по направлению. Объемных зарядов в металле не возникнет.

662. $E=\dfrac{2dV}{l\,(L+l/2)}$.

663. $T=2\pi m/He$, т. е. не зависит ни от v, ни от α.

664. $r=mv/He$.

665. Нулю, так как сила, действующая на электрон, все время перпендикулярна к его перемещению.

666. $AB=\dfrac{2\pi mv\cos\alpha}{He}$.

667. Решение. Радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле $\rho=cp/(eB)$. На единицу длины натянутого шнура действует нормально упругая сила T/ρ_1, которая уравновешивается амперовой силой IB/c. Это дает для радиуса кривизны шнура $\rho_1=Tc/(IB)$. При выполнении условия $\rho_1=\rho$, т. е. $Ip=Te$, форма траектории будет совпадать с формой шнура.

668. Решение. Ускорение жидкости относительно системы отсчета, связанной с вращающейся Землей, определяется выражением

$$\boldsymbol{a}=2\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Omega}]+\boldsymbol{a}',$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость осевого вращения Земли, $\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ — скорость жидкости относительно Земли, $\boldsymbol{a}'$ — ускорение, вызванное всеми потенциальными силами. Потенциальный вектор $\boldsymbol{a}'$ можно исключить, взяв циркуляцию вектора $\boldsymbol{a}$ по замкнутому контуру. В качестве такового выберем геометрическую ось кольцевой трубы. Тогда

$$\oint \boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{s}=\oint_{s} f_K\,ds,$$

где $f_K = 2[\boldsymbol{v\Omega}]$ — кориолисова сила, действующая на единицу массы жидкости. Так как жидкость несжимаемая, а площадь поперечного сечения трубы всюду одна и та же, то осевая составляющая ускорения a_s будет также всюду одинакова. Вынося ее из-под знака интеграла, получим $a_s = \mathscr{E}/s$, где s — длина трубы, а $\mathscr{E}$ означает интеграл $\mathscr{E} = \oint f_K\, d\boldsymbol{s}$. Эта формула аналогична закону Ома. Роль силы тока, сопротивления и электродвижущей силы играют величины a_s, s и $\mathscr{E}$. Аналогом магнитного поля $\boldsymbol{B}$ служит удвоенная угловая скорость вращения Земли $2\boldsymbol{\Omega}$. Поэтому на основании закона электромагнитной индукции можно написать $\mathscr{E} = -d\Phi/dt$, где Φ — поток вектора $2\boldsymbol{\Omega}$, пронизывающий контур s. Таким образом,

$$a_s = \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{s}\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{откуда} \quad V = -\frac{1}{s}\Delta\Phi.$$

Через V обозначена осевая составляющая скорости жидкости.

Допустим, что кольцо имеет форму круга радиуса R и в начальный момент расположено горизонтально. Пусть $\boldsymbol{S}$ — вектор площади кольца в этом положении. Повернем кольцо на 180° вокруг горизонтальной оси. Тогда

$$\Phi_н = 2(\boldsymbol{\Omega S}), \quad \Phi_к = -2(\boldsymbol{\Omega S}),$$
$$\Delta\Phi = -4(\boldsymbol{\Omega S}) = -4\Omega S \sin\vartheta.$$

Здесь ϑ — географическая широта места, где производится опыт. Учитывая, что $S = \pi R^2$, $s = 2\pi R$, и предполагая, что в начальный момент жидкость была неподвижна, получим $V = 2\Omega R \sin\vartheta$. Пусть в конечном положении кольцо находится в покое. Тогда жидкость будет двигаться в нем со скоростью $V = 2\Omega R \sin\vartheta$. На полюсе $\vartheta = 90°$, $V = 2\Omega R$. Этот результат легко получить также, относя все движения к «неподвижной» системе отсчета. На экваторе $V = 0$.

669. $r = R/2$; $T = 2\pi mc/(qB) \approx 60$ лет.

670. Магнитный момент

$$\mathfrak{M} = \frac{-|e|\,r_H v}{2c}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{H}\right) = -\frac{mv^2 H}{2H^2\sqrt{1-v^2/c^2}} = -\frac{v^2\mathscr{E}}{2c^2 H}\left(\frac{\boldsymbol{H}}{H}\right),$$

так как частота обращения частицы в магнитном поле

$$\omega_H = \frac{|e|\,H}{mc}\,\frac{mc^2}{\mathscr{E}} = \frac{|e|\,H}{mc}\sqrt{1-v^2/c^2},$$

радиус орбиты заряда $r_H = v/\omega_H$ и v — скорость частицы $\Big($выше $\mathscr{E} = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ — полная энергия частицы; ее магнитный момент $\mathfrak{M} = \dfrac{e}{2c}[\boldsymbol{rv}]\Big)$.

671. $l=\frac{D}{\pi n(D^2-d^2)}\sqrt{\frac{2Vm}{e}}$.

672. $F_{\text{кул}}/F_{\text{амп}}=mc^2/(2eV)\approx 25$.

673. $B=\mathcal{E}/(Re)=V/R=1{,}07\cdot 10^7$ Гс (ускоряющее напряжение, соответствующее энергии $\mathcal{E}$, равно $V=7{,}6\cdot 10^{10}$ В $=2{,}53\cdot 10^8$ СГСЭ).

Указание. Протоны считать ультрарелятивистскими. Их скорость настолько близка к скорости света, что энергия покоя протона пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией. При таких условиях кинетическую энергию можно вычислить по формуле $\mathcal{E}=mc^2$, где m — релятивистская масса протона.

674. $\omega-\omega_0=\pm\frac{eH}{2mc}=\pm\frac{VrH}{2mc}\approx 10^{-6}\text{ c}^{-1}$. Частота ω возрастет, если векторы $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены противоположно, и уменьшится, если они направлены в одну сторону.

675. Для Li^7 $V=Er\ln(r_2/r_1)\approx E(r_2-r_1)\approx 245$ В, $E=408$ В/см. Для Li^6 $V=229$ В, $E=381$ В/см.

676. 1) Если взять начало координат в точке выхода электрона и направить ось X перпендикулярно к пластинам против направления электрического поля, а ось Y — параллельно пластинам и перпендикулярно к магнитному полю, то траектория электрона будет определяться уравнениями

$$x=\frac{Emc^2}{H^2e}\left(1-\cos\frac{He}{mc}t\right),\quad y=\frac{Emc^2}{H^2e}\left(\frac{He}{mc}t-\sin\frac{He}{mc}t\right).$$

2) $2Emc^2/(H^2e)<d$, $y=\pi mc^2E/(H^2e)$, где d — расстояние между пластинами, e — заряд электрона, m — масса электрона, c — скорость света.

677. Компоненты начальной скорости вдоль пластины катода (v_{y0}) и перпендикулярно к ней (v_{x0}) должны быть $v_{y0}=-E/H$, $v_{x0}=0$; $r=Em/(H^2e)$; $T=2\pi m/(He)$.

678. Решение. Электрическое поле E можно найти, пренебрегая расширением пучка. На границе и вне пучка $E=2\pi\sigma$, где $\sigma=i/e$ — заряд, приходящийся на единицу площади пучка. Частицы, находящиеся на границе пучка, в поперечном направлении будут двигаться равноускоренно и за время t сместятся на

$$\Delta y=eEt^2/(2m)=eEx^2/(2mv^2).$$

Искомое расстояние x определится из требования $\Delta y=d/2$, которое дает

$$x=\sqrt{mv^2d/(2\pi i)},\quad v=\sqrt{2\mathcal{E}/m}.$$

Отсюда $x=13$ см.

679. $B\leqslant\frac{c\,\Delta m}{\delta}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{me}}\approx 4000$ Гс, $t=\frac{Me}{Am_pI}\approx 2{,}5$ года, где m — масса атома урана, Δm — разность масс атомов U^{238} и U^{235}, $A=238$ — относительная атомная масса U^{238}, m_p — масса протона.

680. $\mathfrak{M}=mv^2/2H$.

681. $M=m^2v^2/eH$.

682. $r\approx 1{,}9\cdot 10^{-13}$ см.

683. $x=r\left(1-\cos\frac{eH}{mc}t\right)$, $y=\frac{cE}{H}t+r\sin\frac{eH}{mc}t$, где $r=\frac{mc}{eH}\times$ $\times\left(v-\frac{cE}{H}\right)$, ось X параллельна электрическому полю, ось Y перпендикулярна к обоим полям.

684. $\boldsymbol{v}=c\,[\boldsymbol{EH}]/H^2$.

685. $\frac{e}{m}=\frac{\omega^2 l^2}{2\pi^2 V(2n-1)^2}$, где n — целое число.

686. $p=Ea^3$.

687. $\omega=\frac{e}{m}B\approx 25\cdot 10^{10}$ с$^{-1}$.

688. $r_N:r_1=\sqrt{n}$, где n — число полукругов, сделанных дейтоном после вылета.

689. $q=I_{\text{нас}}/(eSd)\approx 0{,}6\cdot 10^{10}$ см$^{-3}\cdot$с$^{-1}$.

690. Между пластинами конденсатора имеется пространственный заряд, плотность которого на расстоянии x от катода равна $\rho(x)$. Поэтому

$$\frac{d^2V}{dx^2}=-4\pi\rho(x). \qquad (690.1)$$

Если подвижность электрона u, то плотность тока

$$j=-\rho(x)\,uE=-\rho(x)\,u\,\frac{dV}{dx}. \qquad (690.2)$$

Из (690.1) и (690.2) получаем

$$\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{4\pi j}{u}, \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2=\frac{8\pi j}{u}. \qquad (690.3)$$

Когда ток достигает значения насыщения, то при $x=0$ и $j=j_{\text{н}}$ будем иметь $(dV/dx)_{x=0}=0$. Поэтому, интегрируя (690.3), получаем

$$\frac{dV}{dx}=\sqrt{\frac{8\pi j_{\text{н}}}{u}}\,x^{1/2}.$$

Дальнейшее интегрирование дает

$$V_0=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8\pi j_{\text{н}}}{u}}\,d^{3/2}, \quad \text{откуда} \quad u=\frac{32\pi}{9}\frac{d^3 I_{\text{н}}}{SV_0^2}.$$

691. $n=\sqrt{q/\alpha}\,\operatorname{th}(t/\tau)$, где $\tau=\sqrt{1/(q\alpha)}$.

692. $n=\sqrt{\frac{q}{\alpha}}\,\frac{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})-(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})e^{-2t/\tau}}{(\sqrt{q}+n_0\sqrt{\alpha})+(\sqrt{q}-n_0\sqrt{\alpha})e^{-2t/\tau}}$, где $\tau=\sqrt{1/(q\alpha)}$.

693. $\frac{1}{n}-\frac{1}{n_0}=\alpha t.$

694. $q=I_н/(Sle)=1{,}25\cdot 10^9$ см$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$; $n=\sqrt{q/\alpha}=2{,}7\cdot 10^7$ см$^{-3}$.

695. $I_н=qSle=4\cdot 10^{-16}$ А.

696. $t=\frac{SV}{4\pi l I_н}\approx 1{,}3\cdot 10^6$ с ≈ 15 сут.

697. 1) $\tau=1/(n_0\alpha)=0{,}06$ с; 2) $\tau=3/(n_0\alpha)=0{,}18$ с.

698. Решение. Среднее число столкновений положительных ионов с отрицательными в единице объема в единицу времени, сопровождающихся рекомбинацией, определяется выражением $\nu=\sqrt{2}\,n^2\sigma\bar{v}$, где $\bar{v}$ — средняя скорость теплового движения молекулы. В стационарном состоянии это число должно равняться числу вновь образующихся пар ионов $q=\alpha n^2$ в том же объеме за то же время, т. е. $\sqrt{2}\,\sigma\bar{v}=\alpha$. Подставляя сюда $\bar{v}=\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}$, где R — универсальная газовая постоянная, а M — относительная молекулярная масса воздуха ($M\approx 28{,}8$), получим

$$\sigma=\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\pi M}{RT}}\approx 2{,}5\cdot 10^{-11}\ \text{см}^2.$$

699. Если пренебречь массой электрона по сравнению с массой иона, то $\nu_{ei}=n^2\sigma_{ei}\bar{v}_e$, где $\bar{v}_e$ — средняя тепловая скорость электрона. Рассуждая, как в предыдущей задаче, получим

$$\sigma_{ei}=\frac{\alpha_{ei}}{\bar{v}_e}=\frac{\alpha_{ei}}{4}\sqrt{\frac{2\pi m_e}{kT}},$$

где k — постоянная Больцмана, m_e — масса электрона, а α_{ei} — коэффициент рекомбинации электрона с положительным ионом. Величины ν_{ei} и σ_{ei} также снабжены двумя индексами, чтобы явно отметить, что речь идет о столкновениях электронов с ионами.

700. $u=ldI/2c\theta$.

701. $j=n_0 e(\exp\{\alpha d\})$, где e — заряд электрона.

702. $j=n_0 e(\exp\{\alpha d\}-1)/\alpha$, где e — заряд электрона.

703. $v=\sqrt{2e\varphi/m}=1920$ км/с.

704. Положительный столб укорачивается.

705. Кроме продольного градиента потенциала, имеется поперечный градиент вследствие диффузии зарядов к стенкам трубки.

706. Вследствие того, что электрическое поле у поверхности катода перпендикулярно к этой поверхности и значительно сильнее, чем в остальном пространстве трубки (катодное падение).

707. Решение. Если масса иона m, его расстояние от общего центра масс r_1, а частота обращения ω, то общая кинетическая

энергия вращения ионов равна

$$\frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 (d - r_1)^2 \omega^2}{2},$$

где d — расстояние между ионами. Согласно закону равномерного распределения кинетической энергии по степеням свободы эта энергия равна kT. С другой стороны, на каждый ион действует центростремительная сила, равная силе взаимодействия между ионами. Следовательно,

$$m_1 \omega^2 r_1 = m_2 \omega^2 (d - r_1) = \frac{e^2}{d^2}.$$

Из этих уравнений находим

$$2kT = \frac{e^2 r_1}{d^2} + \frac{e^2 (d - r_1)}{d^2} = \frac{e^2}{d}.$$

Отсюда $d = e^2/2kT$, и, следовательно, искомый электрический момент

$$p = de = \frac{e^3}{2kT} \approx 1{,}4 \cdot 10^{-16} \text{ СГСЭ}.$$

§ 10. Электромагнитные волны

708. $V_x = V_0 \cos \frac{k\pi x}{l}$, $I_x = I_0 \sin \frac{k\pi x}{l}$, где V_0 — амплитуда напряжения в пучности напряжения, I_0 — амплитуда тока в пучности тока, x — расстояние от начала линии, k — номер гармоники ($k = 1, 2, 3, \ldots$). $\nu_k = kc/(2l)$, где c — скорость распространения волн вдоль линии (для воздушной линии $c \approx 300\,000$ км/с). Распределение амплитуд для одного из собственных колебаний (третьей гармоники) приведено на рис. 266.

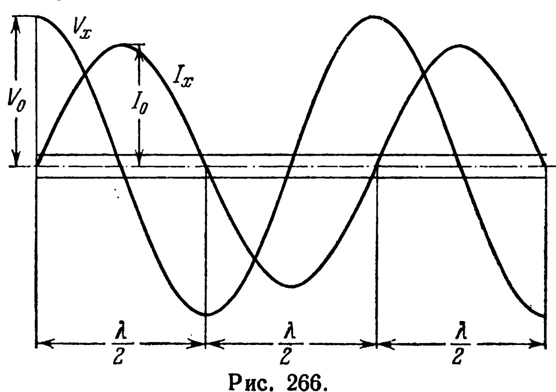


Рис. 266.

709. $V_x = V_0 \sin \frac{k\pi x}{l}$, $I_x = I_0 \cos \frac{k\pi x}{l}$, $\nu_k = \frac{kc}{2l}$. Обозначения те же, что и в ответе предыдущей задачи. Распределение амплитуд

для одного из собственных колебаний (четвертой гармоники) приведено на рис. 267.

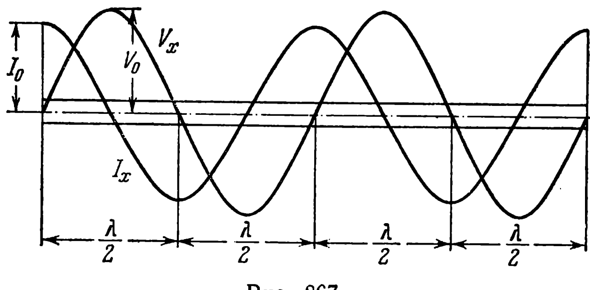


Рис. 267.

710. $V_x = V_0 \cos\left\{\frac{2k+1}{2}\frac{\pi x}{l}\right\}$, $\quad I_x = I_0 \sin\left\{\frac{2k+1}{2}\frac{\pi x}{l}\right\}$, $\quad \nu_k = \frac{2k+1}{4}\frac{c}{l}$, где x — расстояние от разомкнутого конца линии, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ $(2k+1$ — номер гармоники). Распределение амплитуд для одного из собственных колебаний (пятой гармоники) приведено на рис. 268.

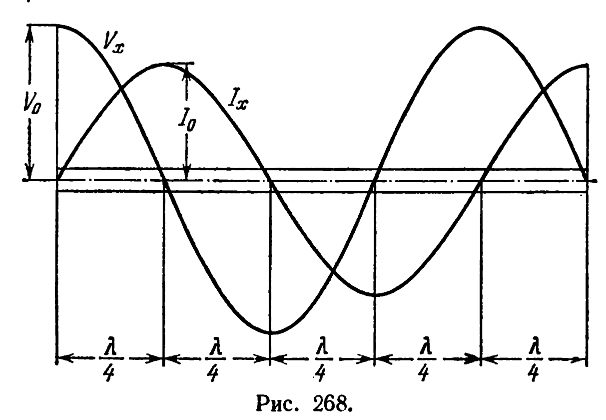


Рис. 268.

711. $\rho = 120 \ln(d/r) \approx 468$ Ом.

Решение. Выделив элемент линии длиной dx (рис. 269), можем написать два уравнения Кирхгофа для этого элемента:

$$I(x+dx) - I(x) = C_1\,dx\,\frac{\partial V}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = C_1\frac{\partial V}{\partial t}; \qquad (711.1)$$

$$V(x+dx) - V(x) = L_1\,dx\,\frac{\partial I}{\partial t}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial V}{\partial x} = L_1\frac{\partial I}{\partial t}, \qquad (711.2)$$

где C_1 и L_1 — емкость и индуктивность на единицу длины линии. Дифференцируя одно из уравнений по x, а другое по t и исключая

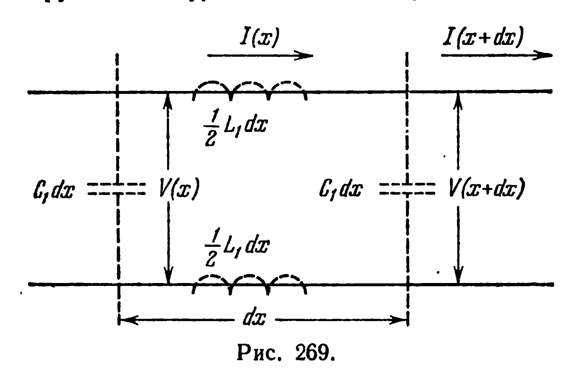


Рис. 269.

одно из неизвестных, получаем уравнения для тока и напряжения:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=L_1C_1\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=L_1C_1\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{711.3}$$

Если напряжения и токи в каждой точке линии меняются со временем по гармоническому закону с угловой частотой ω, то решения уравнений (711.3) имеют вид

$$I=I_0\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right), \quad V=V_0\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right),$$

где $v=1/\sqrt{L_1C_1}$ — скорость распространения волн вдоль линии. Подставляя эти решения в уравнение (711.1), получаем отношение амплитуд напряжения и тока, т. е. волновое сопротивление линии:

$$\rho=\left|\frac{V_0}{I_0}\right|=\frac{1}{vC_1}=\sqrt{\frac{L_1}{C_1}},$$

причем ρ получится в омах, если L_1 и C_1 взяты в практических единицах. Так как для воздушной линии всегда $v\approx 3\cdot 10^{10}$ см/с, то обычно пользуются формулой $\rho=1/vC_1$, причем погонная емкость должна быть взята на сантиметр длины, если скорость выражена в см/с. Если выражать емкость в единицах СГСЭ (т. е. в сантиметрах), то $\rho=\frac{30}{C_1\,(\text{см/см})}$ Ом. Подставляя значение взаимной емкости двух параллельных проводов, приходящееся на сантиметр их длины, $C_1=\frac{1}{4\ln(d/r)}$, получаем приведенное в ответе выражение.

712. $\rho=60\ln(R/r)\approx 97$ Ом.

Решение. Так как внутри коаксиальной линии находится воздух, то для нее пригодно то же выражение для волнового сопро-

тивления, которое получено в предыдущей задаче. Подставляя в это выражение емкость, приходящуюся на 1 см концентрической линии, $C_1 = \frac{1}{2\ln(R/r)}$, получаем выражение, приведенное в ответе.

713. $v = c/\sqrt{\varepsilon} \approx 1{,}43 \cdot 10^{10}$ см/с.

714. $T_k = 2l/kv$, где k—номер гармоники и $v = c/\sqrt{\varepsilon} = 3{,}3 \cdot 10^9$ см/с—скорость распространения электромагнитных волн в воде (диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon \approx 80$).

715. $\nu_1 = v/4l \approx 3000$ Гц.

716. $\rho = \frac{60\ln(R/r)}{\sqrt{\varepsilon}} \approx 68$ Ом.

Решение. Волновое сопротивление $\rho = 1/(vC_1)$, и так как v в $\sqrt{\varepsilon}$ раз меньше, чем в вакууме, а C_1—в ε раз больше, то волновое сопротивление в $\sqrt{\varepsilon}$ раз меньше, чем для такого же кабеля с воздухом в качестве диэлектрика (см. решения задач 711, 712).

717. $Z_{вх} = \left|\rho \operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}\right|$. Поэтому, если длина волны $\lambda = c/\nu = 6$ м, то:

1) $Z_{вх} = |216 \operatorname{ctg}(^2/_3\pi)| \approx 130$ Ом (индуктивное);
2) $Z_{вх} = |216 \operatorname{ctg}\pi| = \infty$ (параллельный резонанс);
3) $Z_{вх} = |216 \operatorname{ctg}(^7/_6\pi)| \approx 374$ Ом (емкостное);
4) $Z_{вх} = |216 \operatorname{ctg}(^5/_2\pi)| = 0$ (последовательный резонанс).

Решение. Если конец линии разомкнут, то амплитуды напряжения и тока вдоль линии распределяются по закону

$$V_x = V_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}, \qquad I_x = I_0 \sin\frac{2\pi x}{\lambda},$$

где x—расстояние от разомкнутого конца линии, а V_0 и I_0—амплитуды в соответствующих пучностях. Поэтому в начале линии $(x = l)$

$$Z_{вх} = \left|\frac{V_0}{I_0}\operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}\right|.$$

Так как $V_0/I_0 = \rho$, где ρ—волновое сопротивление, то

$$Z_{вх} = \left|\rho \operatorname{ctg}\frac{2\pi l}{\lambda}\right|.$$

Характер входного сопротивления можно определить по тому, как оно зависит от частоты: если растет с ростом частоты (уменьшением длины волн), то сопротивление носит индуктивный характер; если уменьшается с ростом частоты—емкостный. В случае 1) с увеличением аргумента ctg растет (второй квадрант) и сопротивление носит индуктивный характер. В случае 3) с увеличением аргумента ctg уменьшается (третий квадрант) и сопротивление носит емкостный характер. В случае 2) на всей линии укладывается одна полуволна,

у входа линии и у ее конца лежит узел тока, т. е. амплитуда тока у входа $I_{вх}=0$. Это — случай, аналогичный случаю параллельного резонанса в контуре без потерь. В случае 4) на всей линии укладывается $^5/_4\lambda$ и у входа линии лежит пучность тока, следовательно, при конечном значении амплитуды напряжения у входа $V_{вх}$ оказывается $I_{вх}=\infty$. Это — случай, аналогичный последовательному резонансу в контуре без потерь.

718. $Z_{вх}=\left|\rho \operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}\right|=\left|216 \operatorname{tg}\frac{2\pi x}{6}\right|$. Входное сопротивление является индуктивным, пока расстояние до мостика меньше $\lambda/4$, т. е. $x < 1{,}5$ м. При $x=1{,}5$ м $Z_{вх}=\infty$ (параллельный резонанс). При $1{,}5\text{ м} < x < 3\text{ м}$ входное сопротивление носит емкостный характер. При $x=3$ м $Z_{вх}=0$ (последовательный резонанс). При $3\text{ м} < x < 4{,}5\text{ м}$ входное сопротивление снова приобретает индуктивный характер, и так далее.

Решение. Так как конец линии замкнут накоротко, то амплитуды напряжения и тока вдоль линии распределяются по закону

$$V_x=V_0\sin\frac{2\pi x}{\lambda}, \qquad I_x=I_0\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

где V_0 и I_0 — амплитуды в соответствующих пучностях, x — расстояние от конца линии (мостика). И так как $V_0/I_0=\rho$, то

$$Z_{вх}=\left|\rho \operatorname{tg}\frac{2\pi x}{\lambda}\right|.$$

Характер нагрузки определяется с помощью соображений, приведенных в решении задачи 717.

719. $Z_{вх}=\left|360 \operatorname{ctg}\frac{2\pi\,(5+0{,}82)\text{ м}}{4\text{ м}}\right|\approx 1220$ Ом, причем сопротивление носит индуктивный характер.

Решение. Емкость C, включенную в конце линии, можно заменить отрезком разомкнутой линии, длина которого $l_{экв}$ определяется из условия, что емкостное сопротивление $X_C=\left|\rho \operatorname{ctg}\frac{l_{экв}}{\lambda}\right|$. Так как отрезок линии должен заменить емкостную нагрузку, то его длина $l_{экв}$ должна быть меньше $\lambda/4$. Подставляя значения из условий задачи, находим

$$l_{экв}=\frac{\lambda}{2\pi}\operatorname{arcctg}\frac{X_C}{\rho}=\frac{4}{2\pi}\operatorname{arcctg}\frac{106}{360}\approx 0{,}82\text{ м}.$$

Далее задача сводится к отысканию входного сопротивления разомкнутой линии длиной $l+l_{экв}=5{,}82$ м (см. задачу 615).

720. $Z_{вх}=\left|47 \operatorname{ctg}\frac{2\pi\,(20+2{,}44)\text{ м}}{11{,}2\text{ м}}\right|\approx 183$ Ом, причем входное сопротивление носит емкостный характер.

Решение. Аналогично предыдущей задаче, заменяем индуктивность отрезком разомкнутой линии, длина которого определяется из условия, что индуктивное сопротивление $X_L = \left| \rho \operatorname{ctg} \frac{2\pi l_{экв}}{\lambda} \right|$. Из условий задачи находим $l_{экв} = 2{,}44$ м. Далее задача сводится к отысканию входного сопротивления разомкнутой линии.

721. 1) $Z_{вх} = \frac{\rho^2}{R_1 l/2} \approx 260\,000$ Ом; 2) $Z_{вх} = \frac{R_1 l}{2} = 0{,}5$ Ом.

Решение. 1) На длине линии укладывается $^5/_4\lambda$, и в случае замкнутой линии у входа линии будет узел тока (так как на замкнутом конце пучность тока): Поэтому этот случай аналогичен параллельному резонансу. Но при параллельном резонансе эквивалентное сопротивление контура $Z_{экв} = X_{1,2}^2/R$, где $X_{1,2}$ — реактивное сопротивление любой из цепей (так как для обеих цепей при резонансе оно одинаково). Далее, так как $X_2 = \omega L$, а $\omega = 1/\sqrt{LC}$, то $Z_{экв} = L/(CR) = \rho^2/R$, где $\rho = \sqrt{L/C}$ — «волновое сопротивление» параллельного контура. Аналогично этому для параллельного резонанса в линии $Z_{вх} = \rho^2/R_д$, где $R_д$ — «действующее» активное сопротивление в линии, определяемое из условия

$$R_0 I_0^2 = \int_0^l R_1 [I(x)]^2 \, dx = \frac{R_1 l}{2}$$

(I_0 — амплитуда тока в пучности). Иначе говоря, $R_д$ — это такое сопротивление, которое, будучи включено в пучность тока, вызовет те же потери, что и активное сопротивление, распределенное вдоль линии (так как распределение тока синусоидально, то «действующее сопротивление» оказывается равным половине активного). Поэтому в рассматриваемом случае $Z_{вх} = \rho^2/(R_1 l/2)$.

2) При разомкнутом конце у входа линии расположится пучность тока, что соответствует последовательному резонансу. При последовательном резонансе входное сопротивление линии равно «действующему» активному сопротивлению (аналогично случаю последовательного резонанса в контуре), т. е. $Z_{вх} = R_1 l/2$.

722. 1) $Z_{вх} = \rho^2/r = 2000$ Ом; 2) $Z_{вх} = r = 80$ Ом.

723. $Z_{вх} = 400$ Ом.

Решение. Если линия замкнута на активное сопротивление, равное волновому, то отражения волн на конце линии не происходит. Следовательно, в линии распространяется только бегущая волна и отношение между амплитудами напряжения и тока во всех точках линии, и в частности у входа, одинаково и равно ρ.

724. Характер электрического и магнитного полей в концентрическом кабеле изображен на рис. 270, *а*. Электрическое поле напря-

женности E направлено по радиусам, магнитое поле напряженности H — по касательным к окружностям. При этом $E=2q/r=2C_1V/r$ и $H=2I/r$, где C_1 — емкость на единицу длины кабеля, r — расстояние от оси кабеля, q — заряд на единицу длины кабеля, I — ток в кабеле.

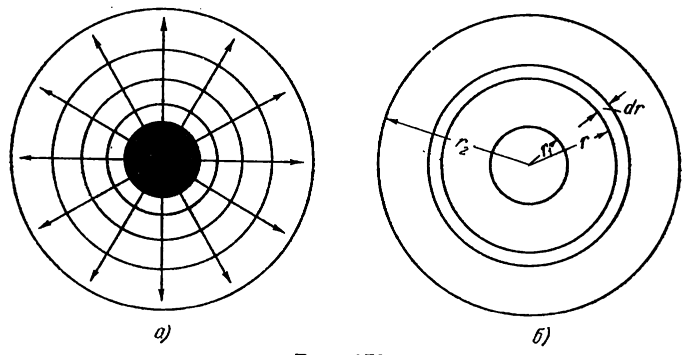


Рис. 270.

По теореме Умова—Пойнтинга поток энергии, протекающей за элемент времени dt через поверхность S, равен

$$dW_S=\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_S [EH]\,dS\right]dt.$$

В рассматриваемом случае через поперечное сечение кабеля за элемент времени dt протекает поток энергии (рис. 270, б)

$$dW=\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{4C_1VI}{r^2}\,dS\right]dt=\left[\frac{1}{4\pi}\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{4C_1VI}{r^2}\cdot 2\pi r\,dr\right]dt=$$

$$=\left[2C_1VI\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}\right]dt=2C_1VI\ln\frac{r_2}{r_1}\,dt.$$

И так как $C_1=\frac{1}{2\ln(r_2/r_1)}$, то $dW=VI\,dt$. Но так же выражается и работа, совершаемая источником за элемент времени dt. Так как в случае бегущей волны амплитуды напряжения и тока в любом сечении кабеля такие же, как у зажимов источника э.д.с., то при интегрировании за единицу времени энергия, протекающая через сечение кабеля, окажется равной мощности, отдаваемой источником.

725. 1) $I_x=I_0\sin\frac{k\pi x}{l}$, где I_0 — амплитуда тока в середине провода (в пучности тока) и x — расстояние от начала провода;

$$\nu_k=kc/2l=k\cdot 25\cdot 10^6\ \text{Гц},\quad \lambda_k=c/\nu_k=12/k\ \text{м},$$

где $k=1, 2, 3, \ldots$;

2) $I_x = I_0 \cos \frac{2k+1}{2} \frac{\pi x}{l}$, где I_0 — амплитуда тока у заземления (в пучности тока) и x — расстояние от заземления;

$$\nu_k = \frac{2k+1}{4} \frac{c}{l} = (2k+1) \cdot 12{,}5 \cdot 10^6 \text{ Гц}, \qquad \lambda_k = \frac{c}{\nu_k} = \frac{24}{2k+1} \text{ м},$$

где $k = 1, 2, 3, \ldots$

726. $\lambda = 6$ мм.

727. $N = 20 \frac{\omega^2 l^2 I^2_{\text{эфф}}}{c^2} = 80\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} I^2_{\text{эфф}}$, где $I_{\text{эфф}}$ — эффективное значение тока в диполе.

728. $R_{\text{и}} = 80$ Ом.

Решение. Поле, создаваемое каждым элементом тока, пропорционально силе тока в этом элементе. Если считать, что поля от всех элементов тока приходят в одинаковой фазе, то амплитуда общей напряженности поля будет пропорциональна $\int\limits_0^l I(x)\,dx$, где l — длина вибратора. Так как ток в вибратор распределен по закону $I_x = I_0 \sin \frac{\pi x}{l}$, то

$$\int\limits_0^l I(x)\,dx = \frac{2l}{\pi} I_0.$$

При равномерном распределении тока мы получили бы величину I_0. Иначе говоря, полуволновый вибратор длины l создает такую же напряженность поля, какую создавал бы вибратор с равномерным распределением тока, равного току в пучности полуволнового вибратора, и длиной $l_1 = \frac{2}{\pi} l$ (l_1 называется «действующей длиной» для «действующей высоты» полуволнового вибратора). Поэтому для подсчета мощности, излучаемой полуволновым диполем, достаточно в ответ предыдущей задачи вместо l подставить $\frac{2}{\pi} l$. Получим $N = 80 \frac{4l^2}{\lambda^2} I^2_{\text{эфф}} = 80 I^2_{\text{эфф}}$ (так как $l = \lambda/2$). Следовательно, $R_{\text{и}} = 80$ Ом.

Мы произвели подсчет, полагая, что поля, приходящие от всех элементов тока, совпадают по фазе. Это, однако, не совсем верно: расстояния от отдельных элементов вибратора до рассматриваемой точки несколько различны, и поэтому несколько различны и фазы полей. Более точный подсчет с учетом этого обстоятельства дает для сопротивления излучения полуволнового вибратора значение $R_{\text{и}} = 72$ Ом.

729. $R_{\text{и}} = 40$ Ом.

Решение. Заземленный четвертьволновый вибратор создает над Землей такое же поле, какое создавал бы вдвое более длинный полуволновый вибратор при том же токе в пучности, если бы Земля отсутствовала, иначе говоря, четвертьволновый вибратор создает только «верхнюю половину» того поля, какое создавал бы соответствующий полуволновый вибратор, и, значит, излучает только половину мощности. Следовательно, сопротивление излучения заземленного четвертьволнового вибратора вдвое меньше, чем полуволнового, т. е. $R_и = 40$ Ом.

730. $R'_и = 140$ Ом.

Решение. Так как вибраторы расположены близко, то поля их приходят в каждую точку в одинаковой фазе, и оба вибратора создают поле вдвое большее, чем каждый в отдельности. Значит, они излучают вместе вчетверо бо́льшую мощность, а каждый излучает вдвое бо́льшую мощность, чем в отсутствие другого. Следовательно, каждый вибратор обладает вдвое бо́льшим сопротивлением излучения, чем то, которое он имеет в отсутствие другого вибратора.

731. Волновый вибратор можно рассматривать как два полуволновых вибратора, расположенных на одной прямой. Но поля от этих вибраторов приходят в каждую точку, вообще говоря, с некоторым сдвигом фазы. Следовательно, излучаемая ими мощность будет меньше, чем излучаемая двумя вибраторами, расположенными параллельно и близко друг к другу (рассмотренными в предыдущей задаче). Поэтому и сопротивление излучения волнового вибратора будет меньше, чем сумма сопротивлений излучения двух вибраторов предыдущей задачи. С другой стороны, в случае двух уединенных, т. е. находящихся далеко друг от друга, вибраторов можно считать, что они вообще излучают независимо, между тем как для волнового вибратора поля в большей части пространства совпадают по фазе и, значит, складываются. Поэтому излучаемая мощность, а следовательно, и сопротивление излучения волнового вибратора больше, чем сумма излучаемых мощностей, а значит, и сопротивлений излучения двух уединенных полуволновых вибраторов.

732. $E \approx 2{,}2$ мВ/м.

Решение. Эффективная напряженность электрического поля полуволнового диполя в экваториальной плоскости (см. задачу 727)

$$E_{эфф} = 30\frac{2\pi}{\lambda}\frac{2l}{\pi}\frac{I_{эфф}}{r} = 60\frac{I_{эфф}}{r},$$

где $I_{эфф}$ — эффективная сила тока вибратора в пучности. Так как, с другой стороны, $I_{эфф} = \sqrt{N/R_и}$, где $R_и$ — сопротивление излучения,

то $E_{эфф} = \frac{60\sqrt{N/R_и}}{r}$. Для полуволнового диполя $R_и = 72$ Ом и $E_{эфф} \approx \frac{7\sqrt{N}}{r}$ В/м.

733. $N' \approx \frac{60}{8\pi^2} \frac{N}{R_и r^2} \frac{\pi D^2}{4} \approx 8 \cdot 10^{-6}$ Вт, где $R_и$ — сопротивление излучения вибратора, равное 72 Ом.

734. Решение. Электродвижущая сила, создаваемая приходящей волной в приемном вибраторе, в каждом элементе вибратора dx может развивать наибольшую мощность $dN = I_{эфф}(x) E_{эфф}\,dx$, где $I_{эфф}$ — эффективная сила тока в данном элементе вибратора, а $E_{эфф}$ — эффективная напряженность поля приходящей волны. Во всем полуволновом вибраторе приходящая волна может развивать наибольшую мощность

$$N = \int_0^l I_{0\,эфф} \sin\frac{\pi x}{l} E_{эфф}\,dx = \frac{2l}{2} I_{0\,эфф} E_{эфф},$$

где $I_{0\,эфф}$ — эффективная сила тока в пучности. Следовательно, приемный вибратор можно рассматривать как источник э.д.с. $\mathcal{E}_{эфф} = \frac{2l}{\pi} E_{эфф}$ (поэтому $2l/\pi$ называют «действующей длиной» полуволнового приемного вибратора) с некоторым внутренним сопротивлением r. Это внутреннее сопротивление во всяком случае не может быть меньше сопротивления излучения вибратора $R_и$ (которым он обладает, помимо омического сопротивления). Наибольшую мощность вибратор будет отдавать приемнику, если входное сопротивление приемника $R_{вх} = R_и$. Тогда полное сопротивление цепи будет равно $2R_и$ и полная мощность, выделяемая в цепи, $N = \mathcal{E}^2_{эфф}/2R_и$. При равенстве внешнего и внутреннего сопротивлений половина этой мощности будет выделяться в приемнике, и, следовательно, наибольшая мощность, которую может получить приемник,

$$N_{макс} = \frac{\mathcal{E}^2_{эфф}}{4R_и} = \frac{E^2_{эфф}(2l/\pi)^2}{4R_и} = \frac{E^2_{эфф} l^2}{\pi^2 R_и}.$$

735. В плоскости, проходящей через ось вибратора,— рис. 271, *а*; в экваториальной плоскости, перпендикулярной к оси,— рис. 271, *б*.

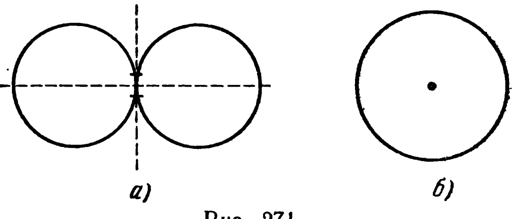


Рис. 271.

736. По мере увеличения длины вибратора будет становиться заметной разность фаз полей, пришедших в какую-либо точку от разных элементов вибратора (рис. 272, *а*). Эта разность фаз будет тем больше, чем больше угол φ. Поэтому амплитуда поля вибратора

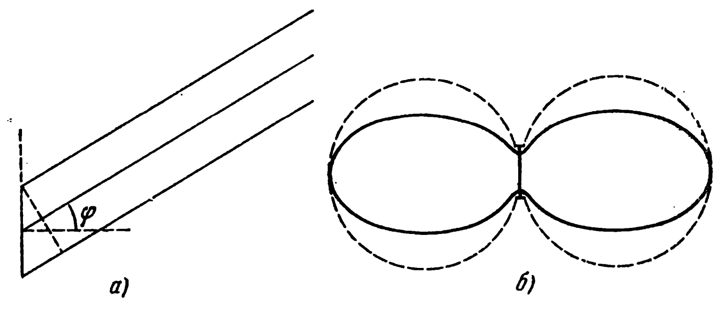


Рис. 272.

при больших углах φ уже не будет равна сумме амплитуд от отдельных элементов вибратора, а будет меньше этой величины. Это приведет к тому, что характеристика направленности в плоскости, проходящей через ось вибратора, будет сплющиваться (рис. 272, *б*). В плоскости, перпендикулярной к оси вибратора, характеристика по-прежнему останется окружностью.

737. 1) См. рис. 273, *а*; 2) см. рис. 273, *б*.

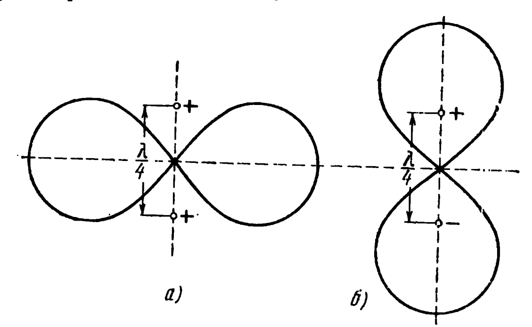


Рис. 273.

738. См. рис. 274, *а*.

Решение. Так как между токами в вибраторах сдвиг фазы равен π, поля обоих вибраторов окажутся в фазе в тех направлениях, для которых разность хода $d=\lambda/2$. А так как $d=\lambda\sin\varphi$ (рис. 274, *б*), то этим направлениям соответствует угол $\varphi=30°$ с прямой, перпендикулярной к линии, соединяющей вибраторы. Во всех

четырех направлениях, удовлетворяющих этому условию, напряженность поля будет наибольшей. В направлении линии, соединяющей вибраторы, излучение будет отсутствовать.

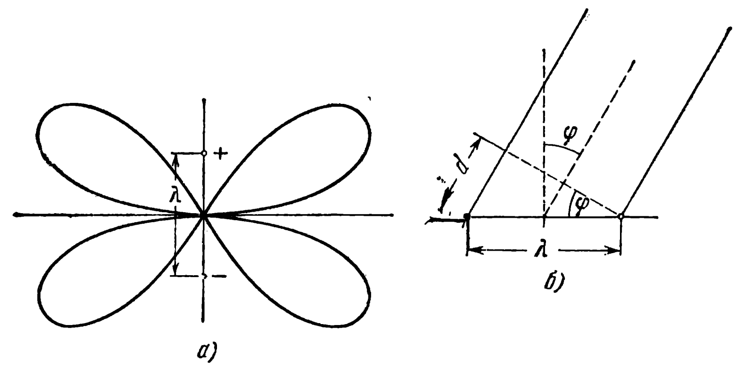


Рис. 274.

739. См. рис. 275.

Решение. Второй вибратор, отстоящий на расстоянии $\lambda/4$ от первого и питаемый током, запаздывающим по фазе на $\pi/2$ относительно первого, устраняет излучение в направлении линии, проведенной от второго вибратора к первому (так как в этом направлении сдвиг фазы между полями обоих вибраторов равен π). Наоборот, в направлении от первого вибратора ко второму разность хода компенсирует сдвиг фазы, оба поля оказываются в фазе и в этом направлении излучение оказывается наибольшим. Если второй вибратор не питают непосредственно током, а подбирают его настройку (длину) так, чтобы ток первого вибратора создавал в нем ток, сдвинутый по фазе относительно первого на $\pi/2$, то он действует так же, как в рассмотренном случае. Такие «пассивные» вибраторы называются рефлекторами.

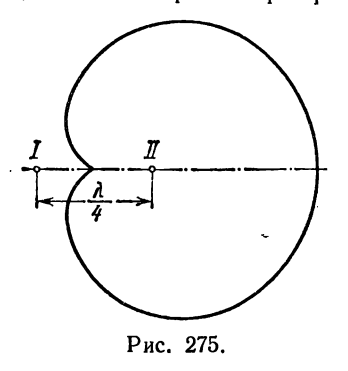


Рис. 275.

740. См. рис. 276.

Решение. Максимум главного лепестка (рис. 276, *а*) соответствует направлению, в котором поля всех вибраторов совпадают по фазе. Если изображать поля всех диполей в виде одинаковых векторов, то направлению главного максимума соответствует расположение векторов, указанное на рис. 276, *б*. В направлениях, отличных

от главного максимума, существует сдвиг фазы между полями отдельных вибраторов, чему соответствует поворот векторов на некоторый угол относительно друг друга. Когда векторы образуют замкнутую фигуру (рис. 276, *в*), результирующее поле будет равно нулю. Это произойдет в первый раз, когда векторы повернуты на угол $\pi/4$ относительно друг друга и образуют восьмиугольник. Соответственно разность хода $d=\lambda/8$ (рис. 276, *г*), т. е. $\sin\varphi=1/4$, или $\varphi\approx 14°30'$.

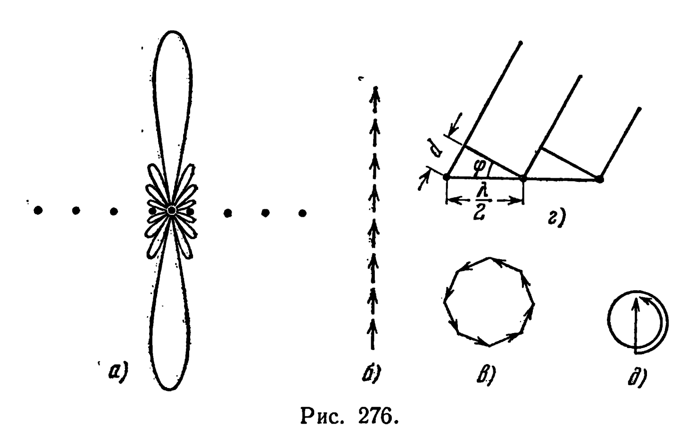


Рис. 276.

Под этим углом в обе стороны от главного максимума будут лежать оба минимума, т. е. полный угол раствора главного лепестка равен $2\varphi=29°$. Максимум первого бокового лепестка получится, когда векторы сделают полтора оборота; тогда их замыкающая, т. е. результирующее поле, достигнет снова максимума. Для оценки величины этого максимума заменим ломаную, образуемую векторами, дугой окружности. Так как полтора оборота этой дуги должны иметь длину, равную сумме длин всех векторов, то диаметр окружности (рис. 276, *д*) должен быть в $3\pi/2$ раз меньше длины прямой (рис. 276, *б*). Следовательно, амплитуда максимума в первом побочном лепестке в $3\pi/2\approx 5$ раз меньше амплитуды в главном максимуме, а энергия в 25 раз меньше. При большом числе диполей это отношение не зависит от числа диполей.

741. 1) Верхняя часть рис. 273, *б*; 2) верхняя часть рис. 274, *а*. Направления, в которых на диаграмме лежат максимумы и минимумы, определяются условиями

$$n\sin\varphi_{\text{макс}}=(2k+1)\frac{\lambda}{4},\quad n\sin\varphi_{\text{мин}}=k\frac{\lambda}{2},$$

где φ — угол над горизонтом, k — целое число.

Решение Так как в методе зеркальных изображений должны быть взяты «зеркальные заряды» противоположного знака, то «зеркальный диполь» под поверхностью земли нужно считать колеблющимся в фазе, противоположной фазе колебаний диполя над землей. Поэтому рассматриваемые случаи соответствуют изображенным на рис. 273, *б* и 274, *а*.

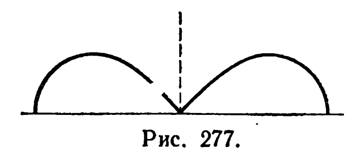


Рис. 277.

742. См. рис. 277.

743. Направления, для которых на диаграмме лежат максимумы и минимумы, определяются из условий

$$n \sin \varphi_{\text{макс}} = \frac{k}{2}, \quad n \sin \varphi_{\text{мин}} = \frac{2k+1}{4},$$

где φ — угол над горизонтом, k — целое число.

Решение. Для вертикального вибратора при противоположных знаках «зеркальных зарядов» направление тока в «зеркальном вибраторе» совпадает с направлением тока в вибраторе над землей. Поэтому оба вибратора колеблются в фазе, вследствие чего направления максимумов и минимумов меняются местами по сравнению со случаем горизонтального вибратора (см. ответ к задаче 741).

744. Для рамки

$$E_{\text{эфф}} = 30\omega^2 nd^2 I_{\text{эфф}}/(c^2 r) \approx 1 \cdot 10^{-4} \text{ В/м}.$$

Для вибратора Герца длины d, питаемого током $I_{\text{эфф}}$,

$$E_{\text{эфф}} = 30\omega d I_{\text{эфф}}/(cr) \approx 1{,}25 \cdot 10^{-3} \text{ В/м},$$

т. е. поле отдельного проводника больше, чем всей рамки в целом.

Решение. Каждый отдельный провод рамки создает поле такое же, как вибратор Герца, но токи в противоположных сторонах рамки направлены навстречу, поэтому и создаваемые ими поля

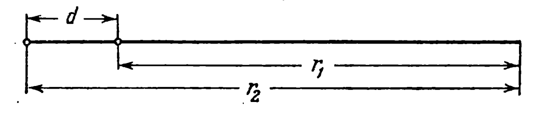


Рис. 278.

направлены навстречу. Вследствие этого в плоскости рамки (рис. 278) результирующее поле выразится так:

$$E = \frac{30\omega n d I_0}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r_1}{c}\right) - \frac{30\omega n d I_0}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r_2}{c}\right) =$$

$$= \frac{30\omega n d I_0}{cr} 2 \sin \omega \frac{r_1 - r_2}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r_1 + r_2}{2c}\right).$$

Так как $r_1 - r_2 = d$, $\omega d \ll c$, то $2\sin\frac{\omega d}{2c} \approx \frac{\omega d}{c}$ и

$$E = \frac{30\omega^2 n d^2 I_0}{c^2 r}\sin\omega\left(t - \frac{r_{\text{ср}}}{c}\right), \quad E_{\text{эфф}} = \frac{30\omega^2 n d^2 I_{\text{эфф}}}{c^2 r}.$$

Таким образом, рамка создает такое же поле, какое создавал бы вибратор Герца длиной $l_{\text{д}} = \omega n d^2/c = 2\pi n d^2/\lambda$. Поэтому эта величина называется «действующей высотой» рамки. Поле рамки оказывается меньше, чем поле, создаваемое всеми проводниками, образующими одну из сторон рамки, в отношении $2\pi d/\lambda$ (вследствие того, что поля противоположных сторон рамки почти противоположны по фазе).

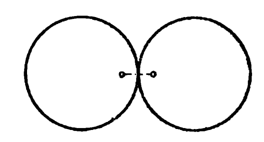


Рис. 279.

745. См. рис. 279.

746. $\mathscr{E} = E\omega n d^2/c \approx 2$ мкВ.

Решение. Так как электрическое поле приходящей волны в противоположных сторонах рамки создает э. д. с., направленные навстречу, то для поля приходящей волны получаются соотношения, аналогичные соотношениям для поля, излучаемого рамкой, в задаче 744. Поэтому для «действующей высоты» приемной рамки получается та же величина, как и для «действующей высоты», передающей рамки: $l_{\text{д}} = \omega n d^2/c$ (для рассматриваемой рамки $l_{\text{д}} = 4$ см). Э. д. с., индуцируемая в рамке, $\mathscr{E} = E l_{\text{д}}$. Соотношение для э. д. с. в вибраторе Герца то же, что и в предыдущей задаче.

747. $v = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{4\pi N}{\omega^2}\dfrac{e^2}{m}}}$, где c — скорость света в вакууме, e и m — заряд и масса электрона.

Решение. Смещение x свободного электрона под действием электрического поля $E_0 \sin\omega t$ определяется уравнением $m\frac{d^2x}{dt^2} = E_0 e \sin\omega t$, откуда $x = -E_0\frac{e}{m\omega^2}\sin\omega t$. Величина вектора электрической поляризации

$$\mathscr{P} = Nex = -E_0\frac{Ne^2}{m\omega^2}\sin\omega t,$$

а вектора электрической индукции

$$D = E_0\sin\omega t + 4\pi\mathscr{P} = E_0\left(1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}\right)\sin\omega t.$$

Диэлектрическая проницаемость ионосферы

$$\varepsilon = \frac{D}{E_0\sin\omega t} = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m\omega^2}.$$

Так как скорость распространения гармонической волны («фазовая скорость») $v = c/\sqrt{\varepsilon}$, то, подставляя найденное выражение для ε, получаем ответ.

748. $\lambda_{\text{мин}} = c \cos\varphi \sqrt{\pi m/Ne^2} \approx 23$ м, где c — скорость света в вакууме, e и m — заряд и масса электрона.

Решение. Условие возникновения полного внутреннего отражения волны, распространяющейся в среде с коэффициентом преломления n_1 при падении под углом φ на границу среды, обладающей коэффициентом преломления n_2, имеет вид $\sin\varphi > n_2/n_1$. В случае волны, распространяющейся от Земли к границе ионосферы, $n_1 \approx 1$, а коэффициент преломления ионосферы (см. решение предыдущей задачи)

$$n_2 = \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{\omega^2 m}}.$$

Для предельного случая, когда еще возможно полное внутреннее отражение от границы ионосферы, $\sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{4\pi Ne^2}{\omega^2_{\text{макс}} m}}$, откуда и получается приведенное выше выражение для наиболее короткой волны:

$$\lambda_{\text{мин}} = 2\pi c/\omega_{\text{макс}}.$$

§ 11. Релятивистская электродинамика

749. Из формул (14) преобразования компонент 4-вектора находим для плотности тока

$$s_1 = \Gamma(s'_1 - iBs'_4), \quad s_2 = s'_2, \quad s_3 = s'_3, \quad s_4 = \Gamma(s'_4 + iBs'_1),$$

где $\Gamma = (1 - B^2)^{-1/2}$, а $B = V/c$.

1) В системе K'

$$\rho' \neq 0, \quad j' = 0, \quad \vec{s}'(0, 0, 0, ic\rho').$$

В системе K

$$s_1 = \Gamma(-iBic\rho') = \Gamma V\rho', \quad s_2 = s_3 = 0, \quad s_4 = \Gamma ic\rho'.$$

Поскольку $s_4 = ic\rho$, получаем формулу преобразования плотности заряда:

$$\rho = \Gamma\rho' = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Изменение плотности заряда имеет простое истолкование. Если в системе K' рассматриваемый объем имеет величину $d\mathcal{V}'$, то в системе K его величина равна $d\mathcal{V} = d\mathcal{V}' \sqrt{1 - V^2/c^2}$. По определению $\rho' = de/d\mathcal{V}'$, $\rho = de/d\mathcal{V}$. Отсюда следует инвариантность выражения

$$\rho'\, d\mathcal{V}' = \rho\, d\mathcal{V}.$$

Заряд в заданном объёме остается неизменным в любой системе отсчета.

Поскольку $s_1 = j_x$, имеем

$$j_x = \Gamma V \rho' = \frac{\rho' V}{\sqrt{1 - V^{2\prime}/c^2}} = \rho V, \quad j_y = j_z = 0.$$

Плотность тока j_x — это плотность конвекционного тока, появление которого связано с тем, что заряды ρ'' движутся вместе с системой K'' относительно системы K.

2) В системе K''

$$\rho' = 0, \quad j' \, (j'_x, \, j'_y, \, j'_z), \quad \vec{s}' \, (j'_x, \, j'_y, \, j_z, \, 0).$$

В системе K (см. формулу (14))

$$s_1 = \Gamma j'_x, \quad s_2 = j'_y, \quad s_3 = j'_z, \quad s_4 = i\Gamma \mathrm{B} j'_x.$$

Поскольку $s_1 = j_x$, $s_2 = j_y$, $s_3 = j_z$, первые три равенства определят плотность тока в K. Из последней формулы ($s_4 = ic\rho$) получим плотность заряда ρ в проводнике в системе K:

$$\rho = \Gamma \frac{V}{c^2} j'_x = \frac{V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} j'_x.$$

Замкнутый нейтральный проводник, по которому идет ток, оказывается неполяризованным только в одной системе отсчета.

750. Пусть имеется заряженная среда, каждой точке которой в системе K соответствуют трехмерная скорость $\boldsymbol{v}$ и плотность заряда ρ. Для небольшого элемента среды $\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$. В сопутствующей данному элементу среды системе отсчета K^0 плотность заряда равна ρ_0, а скорость равна нулю. В системе K

$$\rho = \gamma \rho_0, \quad \boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v} = \gamma \rho_0 \boldsymbol{v}, \quad \vec{s} \, (\rho_0 \gamma \tilde{\boldsymbol{v}}, \quad ic\gamma\rho_0),$$

т. е. можно написать

$$\vec{s} = \rho_0 \vec{u}.$$

Здесь мы ввели множитель $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ и 4-скорость (элемента) $\vec{u} \, (\gamma \boldsymbol{v}, \, ic\gamma)$.

751. Из (28) и (7) имеем

$$\vec{\Phi} \begin{Bmatrix} \Phi_1, & \Phi_2, & \Phi_3, & \Phi_4 \\ A_x, & A_y, & A_z, & \frac{i}{c}\varphi \end{Bmatrix}, \quad \vec{R} \begin{Bmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x, & y, & z, & ict \end{Bmatrix}.$$

Перепишем компоненту $B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$ в виде

$$B_x = B_1 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3},$$

и аналогично B_y, B_z. Перепишем компоненту $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \dot{A}_x$ в виде

$$E_x \equiv E_1 = -\frac{c}{i}\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4} ic = ic\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4}\right),$$

и аналогично E_y, E_z. Мы получим, что все компоненты E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z могут быть представлены в виде одной формулы, приведенной в условии задачи.

752.

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

753. Найдем сначала правила преобразования $\partial\Phi_k/\partial x_i$. Преобразования Лоренца — это преобразования компонент 4-радиуса-вектора. Они могут быть записаны в виде (см. (11), (12))

$$x'_i = \alpha_{ki} x_k, \quad x_i = \alpha_{ik} x'_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

где α_{ik} — матрица Лоренца (с постоянными элементами):

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -i\mathrm{B}\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ i\mathrm{B}\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{B}^2}}, \quad \mathrm{B} = \frac{V}{c},$$

а по k ведется суммирование от 1 до 4 (по двум одинаковым индексам в одной части равенства всегда ведется суммирование от 1 до 4). В точности такие формулы преобразования справедливы и для 4-вектора $\vec{\Phi}$:

$$\Phi_i = \alpha_{im}\Phi'_m, \quad \Phi'_i = \alpha_{mi}\Phi_m.$$

Поскольку $x'_l = \alpha_{kl} x_k$ (суммирование по k), $\partial x'_l/\partial x_k = \alpha_{kl}$. Теперь уже легко найти нужный закон преобразования для $\partial\Phi_i/\partial x_k$:

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k} = \frac{\partial\Phi_i}{\partial x'_l}\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_l}(\alpha_{im}\Phi'_m)\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \alpha_{im}\alpha_{kl}\frac{\partial\Phi'_m}{\partial x'_l}.$$

Мы получили правило преобразования производной компоненты 4-вектора $\vec{\Phi}$ по одной из 4-координат. Это правило — правило преобразования компоненты тензора. Поскольку

$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i} = \alpha_{km}\alpha_{il}\frac{\partial\Phi'_m}{\partial x'_l} = \alpha_{kl}\alpha_{im}\frac{\partial\Phi'_l}{\partial x'_m}$$

(мы просто поменяли «немые» индексы суммирования m на l и наоборот), то очевидно, что комбинация $\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}$ преобразуется

по закону

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}=\alpha_{im}\alpha_{kl}\left(\frac{\partial \Phi'_l}{\partial x'_m}-\frac{\partial \Phi'_m}{\partial x'_l}\right) \quad \text{или} \quad F_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kl}F'_{ml}.$$

Это и есть правило преобразования компонент тензора второго ранга (по m и l — суммирование).

754.

$$F_{12}\equiv c\mathrm{B}_2=\alpha_{1m}\,\alpha_{2l}\,F'_{ml}=\alpha_{22}\,\alpha_{1m}\,F'_{m2}=\alpha_{1m}F'_{m2}=\alpha_{11}F'_{12}+\alpha_{14}F'_{42}=$$
$$=\Gamma\left\{c\mathrm{B}'_z-i\,\frac{V}{c}\,(iE'_y)\right\}=\Gamma\left(c\mathrm{B}'_z+\frac{V}{c}\,E'_y\right).$$

Здесь при двойном суммировании по m и l учтено, что $\alpha_{11}=\Gamma$, $\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$, $\alpha_{14}=i\mathrm{B}\Gamma$, $\alpha_{21}=\alpha_{23}=\alpha_{24}=0$, $\alpha_{22}=1$ (см. (10)). Находя аналогично остальные компоненты, получим

$$E_x=E'_x,\quad E_y=\Gamma\,(E'_y+VB'_z),\qquad E_z=\Gamma\,(E'_z-VB'_y),$$
$$B_x=B'_x,\quad B_y=\Gamma\left(B'_y-\frac{V}{c^2}\,E'_z\right),\quad B_z=\Gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}\,E'_y\right).$$

755. Мы пользуемся следующим расположением координатных осей: оси Y, Z параллельны осям Y' и Z', оси X и X' совпадают, а относительная скорость систем отсчета направлена вдоль общей оси X, X'. Тогда $\boldsymbol{E}_{\parallel}=E_x\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{E}_{\perp}=E_y\boldsymbol{j}+E_z\boldsymbol{k}$. Вектор скорости $\boldsymbol{V}$ системы отсчета K' относительно K имеет компоненты $\boldsymbol{V}(V,\,0,\,0)$. С учетом этого имеем

$$[\boldsymbol{VB}']=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ V & 0 & 0\\ B'_x & B'_y & B'_z\end{vmatrix}=V\,(-\boldsymbol{j}B'_z+\boldsymbol{k}B'_y),\quad [\boldsymbol{VE}']=V\,(-\boldsymbol{j}E'_z+\boldsymbol{k}E'_y).$$

Если иметь еще в виду, что для любого вектора $[\boldsymbol{VA}]_{\parallel}=0$, а $[\boldsymbol{VA}]_{\perp}$ совпадает просто с векторным произведением, то формулы преобразования, полученные в предыдущей задаче, можно записать так:

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}=\boldsymbol{E}'_{\parallel},\qquad \boldsymbol{E}_{\perp}=\Gamma\,(\boldsymbol{E}'-[\boldsymbol{VB}'])_{\perp},$$
$$\boldsymbol{B}_{\parallel}=\boldsymbol{B}'_{\parallel},\qquad \boldsymbol{B}_{\perp}=\Gamma\left(\boldsymbol{B}'+\frac{1}{c^2}\,[\boldsymbol{VE}']\right)_{\perp}.$$

Формулы обратного перехода получаются заменой штрихованных величин на нештрихованные (и наоборот) и изменением знака скорости:

$$\boldsymbol{E}'_{\parallel}=\boldsymbol{E}_{\parallel},\qquad \boldsymbol{E}'_{\perp}=\Gamma\,(\boldsymbol{E}+[\boldsymbol{VB}])_{\perp},$$
$$\boldsymbol{B}'_{\parallel}=\boldsymbol{B}_{\parallel},\qquad \boldsymbol{B}'_{\perp}=\Gamma\left(\boldsymbol{B}-\frac{1}{c^2}\,[\boldsymbol{VE}]\right)_{\perp}.$$

756. В векторной записи необходимо различать преобразование векторов, параллельных направлению относительной скорости и пер-

пендикулярных к ней. Если даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то слагающими вектора $\boldsymbol{a}$, параллельными и перпендикулярными вектору $\boldsymbol{b}$, будут векторы

$$\boldsymbol{a}_{\parallel}=\frac{\boldsymbol{b}}{b}\frac{(\boldsymbol{ab})}{b}=\frac{\boldsymbol{b}}{b^2}(\boldsymbol{ab}),\quad \boldsymbol{a}_{\perp}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_{\parallel}=\boldsymbol{a}-\frac{\boldsymbol{b}}{b^2}(\boldsymbol{ab}).$$

Поэтому, например, для вектора $\boldsymbol{B}$ запишем

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\parallel}+\boldsymbol{B}_{\perp}=\boldsymbol{B}'_{\parallel}+\Gamma\left(\boldsymbol{B}'_{\perp}+\left[\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\boldsymbol{E}'\right]_{\perp}\right)=\Gamma\left(\boldsymbol{B}'+\left[\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\boldsymbol{E}'\right]\right)+$$
$$+\boldsymbol{B}'_{\parallel}-\Gamma\boldsymbol{B}'_{\parallel}=\Gamma\left(\boldsymbol{B}'+\left[\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\boldsymbol{E}'\right]\right)+(1-\Gamma)\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{VB}').$$

Аналогично для вектора $\boldsymbol{E}$ получим

$$\boldsymbol{E}=\Gamma(\boldsymbol{E}'-[\boldsymbol{VB}'])+(1-\Gamma)\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}(\boldsymbol{VE}').$$

757. $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}'-[\boldsymbol{VB}'],\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'+\left[\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\boldsymbol{E}'\right].$

758. В любой инерциальной системе отсчета поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ оказываются взаимно перпендикулярными. Пусть, например, в K' поле $\boldsymbol{B}'=0$. Тогда, согласно формулам, полученным в задаче 755,

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\parallel}+\boldsymbol{B}_{\perp}=\frac{\Gamma}{c^2}[\boldsymbol{VE}']=\frac{\Gamma}{c^2}\left[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{E}'_{\perp}\right]=\frac{1}{c^2}\left[\boldsymbol{V},\ \Gamma\boldsymbol{E}'_{\perp}\right]=\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{VE}],$$

поскольку $\left[\boldsymbol{V},\ \boldsymbol{E}'_{\parallel}\right]=0$.

759. Проще всего убедиться в соблюдении равенств

$$c^2B'^2-E'^2=c^2B^2-E^2,\qquad \boldsymbol{EB}=\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}'$$

непосредственной подстановкой в правую или левую части соответствующих формул преобразования.

760. Пусть $\boldsymbol{E}'=0$, тогда

$$c^2B^2-E^2=c^2B'^2>0,\qquad \boldsymbol{EB}=0.$$

Если $\boldsymbol{B}'=0$, то

$$c^2B^2-E^2=-E'^2<0,\qquad \boldsymbol{EB}=0.$$

Таким образом, в исходной системе поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ должны быть взаимно перпендикулярны. Какое именно из полей может быть уничтожено переходом к другой системе отсчета, зависит от знака инварианта $I_1=c^2B^2-E^2$.

761. Пусть $c^2B'^2-E'^2<0$. Тогда можно добиться выполнения условия $\boldsymbol{B}=0$. Из результата задачи 756 следует, что $\boldsymbol{VB}'=0$. Рассмотрим частный случай, потребовав, чтобы также $\boldsymbol{VE}'=0$. Условие $\boldsymbol{B}=0$ приводит к уравнению

$$\boldsymbol{B}'+\frac{1}{c^2}[\boldsymbol{VE}']=0.$$

Умножим векторно обе части этого равенства на $\boldsymbol{E}'$. Находим

$$[\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}'] + \frac{1}{c^2} \boldsymbol{V} E'^2 = 0,$$

откуда,

$$\boldsymbol{V} = -\frac{c^2 [\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}']}{E'^2}.$$

В новой системе отсчета

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}'}{E'} \sqrt{E'^2 - c^2 B'^2}.$$

В любой системе отсчета, движущейся вдоль $\boldsymbol{E}$ с произвольной скоростью $V' < c$, магнитного поля тоже не будет. Поэтому общий случай получается переходом к одной из таких систем отсчета.

В случае $c^2 B'^2 - E'^2 > 0$ скорость $\boldsymbol{V}$ перпендикулярна $\boldsymbol{E}'$, а в частном случае, когда она также перпендикулярна $\boldsymbol{B}'$, аналогично предыдущему получаем

$$\boldsymbol{V} = -\frac{[\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}']}{B'^2}, \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{B}'}{B} \sqrt{c^2 B'^2 - E'^2}.$$

762. Всегда можно найти такую инерциальную систему отсчета K, в которой электрическое и магнитное поля в данной точке станут параллельными друг другу, если в исходной системе отсчета они направлены под углом друг к другу. То же относится к однородному полю в целом. Очевидно, что если известна одна такая система, то существует бесчисленное множество систем, обладающих этим свойством. Действительно, в любой инерциальной системе отсчета K', движущейся равномерно и прямолинейно относительно K по направлению, совпадающему с общим направлением $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ останутся параллельными, потому что компоненты полей, направленные вдоль движения, не изменяются.

Чтобы найти одну из систем, в которой поля параллельны, поступим следующим образом. Допустим, что в системе K поля параллельны, т. е. $[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}] = 0$. Направим скорость системы K' (в которой поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ уже не будут параллельными) перпендикулярно полям $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$; направление скорости $\boldsymbol{V}$ примем за ось XX'. Тогда $E_x = B_x = 0$ и равенство нулю векторного произведения эквивалентно равенству $E_y B_z - E_z B_y = 0$. Подставляя в это равенство значения компонент $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$, выраженные через компоненты $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ (см. задачу 754), мы получим уравнение

$$\Gamma\,(E'_y + VB'_z)\,\Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2} E'_y\right) = \Gamma\,(E'_z - VB_y)\,\Gamma\left(B_y - \frac{V}{c^2} E'_z\right).$$

Из этого уравнения можно определить по заданным полям $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$

скорость системы V. Если принять во внимание, что $E'_x = B'_x = 0$, мы можем найти и направление скорости $\boldsymbol{V}$ относительно $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$. Действительно, $[\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}'] = \boldsymbol{i}\,[E'_yB'_z - E'_zB'_y]$, а $\boldsymbol{V} = V\boldsymbol{i}$, и поэтому можно записать $\frac{V/c^2}{1+V^2/c^2} = -\frac{|\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}'|}{c^2B'^2+E'^2}$. Тем самым по векторам $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{B}'$ в системе K' можно найти систему K, в которой $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ будут параллельны. Направление скорости этой системы совпадает с направлением $[\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}']$, а величина скорости является одним из корней полученного выше уравнения. Из двух корней выбирается тот, для которого $V < c$.

Случай $\boldsymbol{E}'\boldsymbol{B}' = 0$ разобран в задаче 758: перейти к параллельным полям здесь уже нельзя, зато можно перейти либо к чисто магнитному, либо к чисто электрическому полю.

Можно решать эту задачу также, подставив векторные значения полей, полученные в задаче 755, в условие параллельности полей в системе K, т. е. в условие $[\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}] = 0$.

763. 1) Найдем, например, значение $\mathfrak{f}_1$:

$$\mathfrak{f}_1 = f_x = \frac{1}{c} F_{1k}s_k = \frac{1}{c}(F_{12}s_2 + F_{13}s_3 + F_{14}s_4) = s_2\frac{F_{12}}{c} + s_3\left(-\frac{F_{13}}{c}\right) + \left(-\frac{is_4}{c}\right) iE_{14} = \rho v_yB_z - \rho v_zB_y + \rho E_x = \{\rho\boldsymbol{E} + \rho\,[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\}_x.$$

В этих равенствах учтено, что

$$\rho = -\frac{i}{c}s_4, \quad \rho v_y = s_2, \quad \rho v_z = s_3,$$
$$B_z = \frac{F_{12}}{c}, \quad B_y = -\frac{F_{13}}{c}, \quad F_{11} = 0.$$

Аналогичные выражения получаются для $\mathfrak{f}_2 = f_y$ и $\mathfrak{f}_3 = f_z$.

Найдем четвертую составляющую:

$$\mathfrak{f}_4 = \frac{1}{c}F_{4k}s_k = \frac{1}{c}(F_{41}s_1 + F_{42}s_2 + F_{43}s_3) = \frac{i\rho}{c}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E}).$$

Величина $\rho(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})$ имеет простой смысл, который сразу раскрывается, если обе части равенства $\boldsymbol{f} = \rho\{\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\}$ умножить скалярно на $\boldsymbol{v}$. Принимая во внимание, что $[\boldsymbol{v}\boldsymbol{B}]\,\boldsymbol{v} = 0$, получим $(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}) = \rho(\boldsymbol{v}\boldsymbol{E})$. Левая часть последнего равенства представляет собой мощность силы Лоренца в единице объема (силы, действующие со стороны магнитного поля, работы не совершают). С учетом этого имеем

$$\mathfrak{f}_4 = \frac{i}{c}(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}).$$

Таким образом, мы пришли к 4-вектору плотности силы, компоненты которого мы запишем вместе:

$$\vec{\mathfrak{f}}\left(f_x,\ f_y,\ f_z,\ \frac{i}{c}(\boldsymbol{f}\boldsymbol{v})\right).$$

Разделение сил, действующих на заряд со стороны электрического и магнитного полей, на части $\rho \boldsymbol{E}$ и $\rho [\boldsymbol{vB}]$ относительно. Обе эти силы составляют единое целое и, естественно, сливаются в одно четырехмерное выражение.

2) Начнем со случая покоящейся среды. Пусть в сопутствующей системе K' (там, где среда покоится) задана плотность тока, а плотность заряда равна нулю, т. е. $\vec{s}'(j_1', j_2', j_3', 0)$. 4-скорость среды в системе K' есть $\vec{u}'(0, 0, 0, ic)$. Найдем компоненты s_i':

$$s_1' = \frac{\sigma}{c} F_{1k}' u_k' = \frac{\sigma}{c} F_{14} u_4' = \frac{\sigma}{c}(-iE_x')\, ic = \sigma E_x',$$

т. е. $j_x' = \sigma E_x'$. Аналогично $j_y' = \sigma E_y'$, $j_z' = \sigma E_z'$. Четвертая компонента:

$$s_4' = \frac{\sigma}{c} F_{4k}' u_k' \equiv 0 \qquad (s_4' = ic\rho' = 0,\ F_{44}' = 0).$$

Следовательно, в сопутствующей среде системе отсчета K' просто получается дифференциальный закон Ома.

В системе отсчета K, относительно которой среда движется, имеем

$$s_1 = \frac{\sigma}{c} F_{1k} u_k = \frac{\sigma}{c}(F_{12}u_2 + F_{13}u_3 + F_{14}u_4) = \frac{\sigma}{c}(-iE_x)\, ic\Gamma = \sigma\Gamma E_x,$$

$$s_2 = \frac{\sigma}{c} F_{2k} u_k = \frac{\sigma}{c}(F_{21}u_1 + F_{24}u_4) =$$

$$= \frac{\sigma}{c}(-cB_y\Gamma V + (-iE_y)\, ic\Gamma) = \sigma\Gamma\{E_y + [\boldsymbol{VB}]_y\},$$

$$s_3 = \sigma\Gamma\{E_z + [\boldsymbol{VB}]_z\}.$$

Окончательно:

$$\boldsymbol{j} = \sigma\Gamma(\boldsymbol{E} + [\boldsymbol{VB}]).$$

Плотность тока в среде с проводимостью σ обусловлена величиной электрического поля в этой среде.

Четвертое соотношение определяет плотность заряда, связанную с током проводимости:

$$s_4 = ic\rho = \frac{\sigma}{c} F_{4k} u_k = \frac{\sigma}{c}(i\Gamma \boldsymbol{EV}) = i\Gamma\frac{\boldsymbol{jV}}{c}, \quad \text{или} \quad \rho = \Gamma\frac{\boldsymbol{jV}}{c^2},$$

в полном согласии с результатами п. 2) задачи 749.

764. Пусть в системе K' имеется точечный заряд, расположенный в начале отсчета. Тогда в системе K'

$$\boldsymbol{B}' = 0, \qquad \boldsymbol{E}' = \frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{\boldsymbol{r}'}{r'^3},$$

или, в проекциях на оси координат,

$$B'_x=0, \quad B'_y=0, \quad B'_z=0,$$

$$E'_x=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{y'}{r'^3}, \quad E'_z=\frac{e}{4\pi\varepsilon}\frac{z'}{r'^3},$$

где $r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$. В системе K (см. задачу 754)

$$E_x=E'_x, \quad E_y=\Gamma E'_y, \quad E_z=\Gamma E'_z,$$

$$B_x=B'_x=0, \quad B_y=-\Gamma\frac{V}{c^2}E'_z, \quad B_z=\Gamma\frac{V}{c^2}E'_y.$$

Так как $B_x=0$, то магнитное поле в системе K лежит в плоскостях, перпендикулярных оси X, т. е. в плоскостях, перпендикулярных направлению движения заряда. Уравнения силовых линий магнитного поля в системе K имеют вид $\frac{dy}{B_y}=\frac{dz}{B_z}$, или $\frac{dy}{dz}=\frac{B_y}{B_z}$, откуда $\frac{B_y}{B_x}=-\frac{E'_z}{E'_y}=-\frac{z'}{y'}=-\frac{z}{y}$, поскольку при преобразовании Лоренца $z'=z$ и $y'=y$. Следовательно, дифференциальное уравнение силовых линий имеет вид $\frac{dy}{dz}=-\frac{z}{y}$. В качестве первого интеграла мы имеем уравнение окружности $y^2+z^2=\text{const}$. Следовательно, силовые линии являются окружностями с центром на оси тока.

Выразим r' через координаты заряда в системе K. Согласно преобразованиям Лоренца (8)

$$x'=\Gamma(x-Vt), \quad y'=y, \quad z'=z$$

и выражение для r'^2 запишется в виде

$$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2=\Gamma^2(x-Vt)^2+y^2+z^2=$$

$$=\Gamma^2\left\{(x-Vt)^2+\frac{y^2+z^2}{\Gamma^2}\right\}=\Gamma^2\Re^2, \quad r'=\Gamma\Re,$$

где

$$\Re^2=(x-Vt)^2+\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)(y^2+z^2).$$

Тогда

$$E_x=\frac{e(x-Vt)}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}, \quad E_y=\frac{ey}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}, \quad E_z=\frac{ez}{\Gamma^2 4\pi\varepsilon\Re^3}.$$

765. В системе K' скалярный и векторный потенциалы равны

$$\varphi'=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{r'}=\frac{e}{i}\Phi'_4, \quad A'=0.$$

Если в системе K' 4-потенциал $\vec{\Phi}$ имеет компоненты $\left(A', \frac{i}{c}\varphi'\right)$, то в системе K

$$\Phi_1=\Gamma\left(\Phi'_1-i\frac{V}{c}\Phi'_4\right), \quad \Phi_2=\Phi'_2, \quad \Phi_3=\Phi'_3, \quad \Phi_4=\Gamma\left(\Phi'_4+i\frac{V}{c}\Phi'_1\right).$$

Подставляя значения компонент 4-потенциала $\vec{\Phi}'$ в системе K',

получим

$$A_1=\Gamma\left(-i\frac{V}{c}\frac{i}{c}\varphi'\right)=\Gamma\frac{V}{c^2}\varphi',\quad A_2=A_3=0,\quad \frac{i}{c}\varphi=\Gamma\frac{i}{c}\varphi'.$$

Таким образом,

$$\varphi=\Gamma\varphi',\quad A=\frac{V}{c^2}\Gamma\varphi'=\frac{V}{c^2}\varphi.$$

Выразим теперь скалярный φ и векторный A потенциалы через $\mathfrak{R}$ (см. задачу 764):

$$\varphi=\Gamma\varphi'=\Gamma\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{r'}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{e}{\mathfrak{R}},\quad A=\frac{V}{c^2}\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{eV}{c^2\mathfrak{R}}.$$

766. В системе K' индукция магнитного поля $B'=0$. В системе K для индукции поля B найдем (см. задачу 758)

$$B=\frac{1}{c^2}[VE].$$

Если скорость заряда мала, то приближенно в вакууме

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{eR}{R^3}$$

и

$$B=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{e[VR]}{R^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{[eVR]}{R^3}.$$

Последнее выражение представляет собой закон Био — Савара.

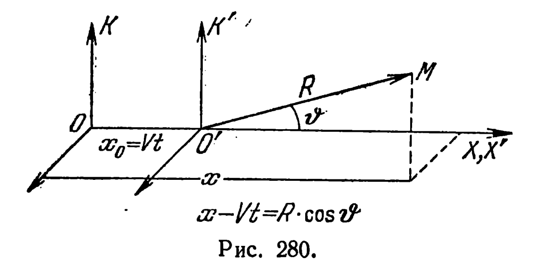


Рис. 280.

767. Найдем силу F_1, действующую на заряд e_1. Со стороны заряда e_2 на e_1 действуют электрическое E_2 и магнитное B_2 поля, поэтому

$$F_1=e_1\{E_2+[VB_2]\}=e_1E_2+\frac{e_1}{c^2}[V[VE_2]]=$$

$$=e_1E_2+\frac{e_1}{c^2}V(VE_2)-\frac{e_1}{c^2}V^2E_2=e_1\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)E_2+\frac{e_1}{c^2}V(VE_2).$$

Мы воспользовались результатами предыдущей задачи для B_2.

Для E воспользуемся выражением, полученным в задаче 764, где

$$\mathfrak{R}^2=R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right) \text{ и } \boldsymbol{R}=(x-Vt)\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

(рис. 280) есть радиус-вектор, проведенный от заряда e_2 к заряду e_1, а ϑ — угол между $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{V}$. Тогда

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^3}\frac{(1-V^2/c^2)^2\boldsymbol{R}}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}+\frac{e_1e_2\boldsymbol{V}V\cos\vartheta\,(1-V^2/c^2)}{4\pi\varepsilon c^2R^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}=$$

$$=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{1-V^2/c^2}{1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta}\left\{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{R}}{R}+\frac{\boldsymbol{V}V}{c^2}\cos\vartheta\right\},$$

откуда для составляющей по направлению движения имеем

$$F_x=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{(1-V^2/c^2)\cos\vartheta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}},$$

а для составляющей, перпендикулярной движению, —

$$F_y=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{(1-V^2/c^2)^2\sin\vartheta}{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}.$$

Если два заряда расположены на прямой, параллельной оси y, $\nu=\pi/2$, и формулы для F_x и F_y упрощаются:

$$F_x=0,\quad F_y=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon y^2}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Эти формулы можно получить преобразованием силы, действующей между покоящимися зарядами в системе K', к силе в системе K согласно формулам

$$F_x=F'_x,\quad F_y=F'_y\sqrt{1-V^2/c^2},$$

непосредственно следующим из законов преобразования 4-силы (см. приложение III).

768.

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{p_0\mathfrak{R}}{\Gamma\mathfrak{R}^3},\qquad \boldsymbol{A}=\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\varphi,$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{3\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}\mathfrak{R}_0)-\boldsymbol{p}_0\mathfrak{R}^3}{4\pi\varepsilon\Gamma^2\mathfrak{R}^5},\qquad \boldsymbol{B}=\left[\frac{\boldsymbol{V}}{c^2}\boldsymbol{E}\right]$$

(см. решения задач 765—766).

769. В системе отсчета, связанной с вращающимся цилиндром, существует электрическое поле

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{VB}]$$

(это выражение записано для элемента цилиндра, для которого скорость V можно считать на всем его протяжении постоянной). Это

поле и вызывает радиально направленную поляризацию цилиндра. Если проводимость цилиндра отлична от нуля, то между внутренней и внешней поверхностями цилиндра появится разность потенциалов. Если же эти поверхности с помощью скользящих контактов соединить проводником, то в этой цепи пойдет ток.

770. При движении поляризованного диэлектрика (рис. 208а) возникает такое же магнитное поле, которое было бы в том случае, если бы диэлектрик обладал намагниченностью

$$\mathcal{Y} = [\mathcal{P}^0 V],$$

где $\mathcal{P}^0$ — поляризованность вещества в собственной системе отсчета. Поэтому вращающийся электрически поляризованный эбонит оказывается с точки зрения лабораторной системы отсчета намагниченным в радиальном направлении. На внешней поверхности диска будет северный (магнитный) полюс, на внутренней — южный. Пропуская ток через неподвижную установку, можно найти эквивалентный магнитный момент, создаваемый током. Объяснить это явление можно также, рассматривая конвекционный ток связанных и свободных зарядов, имеющихся на границах эбонит — металл и на металлических кольцах.

771. Когда элемент намагниченного вещества, обладающего намагниченностью $\mathcal{Y}^0$ в собственной системе отсчета, движется относительно лабораторной системы отсчета со скоростью V, лабораторный наблюдатель обнаружит поляризованность вещества

$$\mathcal{P} = \left[\frac{V}{c^2}\,\mathcal{Y}^0\right].$$

Рассмотрим для простоты поступательное движение намагниченной среды (рис. 208 в). Из рисунка видно, как направлена поляризация вещества. Если намагниченная среда обладает проводимостью, возникает разность потенциалов; если замкнуть цепь, пойдет ток. Поляризация небольшого элемента цилиндра (см. рис. 208 б) подобна поляризации поступательно движущегося параллелепипеда, изображенного на рис. 208в (см. стр. 151).

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Таблица перевода выражений и формул из гауссовой системы в систему СИ и обратно

Величина	Гауссова система	Система СИ
Скорость света	c	$(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$
Напряженность электрического поля, потенциал	$\boldsymbol{E}$, φ	$\sqrt{4\pi\varepsilon_0}\,(\boldsymbol{E}, \varphi)$
Электрическая индукция	$\boldsymbol{D}$	$\sqrt{4\pi/\varepsilon_0}\ \boldsymbol{D}$
Заряд, плотность заряда, ток, плотность тока, поляризованность	q, ρ, I, j, $\mathscr{P}$	$\dfrac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\,(q, \rho, I, j, \mathscr{P})$
Магнитная индукция, магнитный поток	$\mathbf{B}$, Φ	$\sqrt{4\pi/\mu_0}\ (\boldsymbol{B}, \Phi)$
Напряженность магнитного поля	$\boldsymbol{H}$	$\sqrt{4\pi\mu_0}\ \boldsymbol{H}$
Магнитный момент, намагниченность	$\mathfrak{M}$, $\mathscr{Y}$	$\sqrt{\mu_0/(4\pi)}\ (\mathfrak{M}, \mathscr{Y})$
Электрическая проницаемость, магнитная проницаемость (относительные)	ε, μ	ε, μ
Электрическая поляризуемость, магнитная восприимчивость	α, $\varkappa$	$\dfrac{1}{4\pi}(\alpha, \varkappa)$
Удельная электрическая проводимость	λ	$\lambda/(4\pi\varepsilon_0)$
Сопротивление	R	$4\pi\varepsilon_0 R$
Емкость	C	$C/(4\pi\varepsilon_0)$
Индуктивность	L	$(4\pi/\mu_0)\,L$

II. Таблица перевода численных значений физических величин

Наименование	Обозначение	СИ	Гауссова система
Длина	l	метр (м)	10^2 см
Масса	m	килограмм (кг)	10^3 г
Время	t	секунда (с)	1 с
Сила	F	ньютон (Н)	10^5 дин
Работа, энергия	A, $\mathscr{E}$	джоуль (Дж)	10^7 эрг
Мощность	N	ватт (Вт)	10^7 эрг/с
Давление	P	паскаль (Па)	10 дин/см^2
Сила электрического тока	I	ампер (А)	$3\cdot10^9$
Электрический заряд	q	кулон (Кл)	$3\cdot10^9$
Напряженность электрического поля	E	вольт на метр (В/м)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-4}$
Электрический потенциал	φ	вольт (В)	$\frac{1}{3}\cdot10^{-2}$
Поляризованность	$\mathscr{P}$	кулон на квадратный метр (Кл/м^2)	$3\cdot10^5$
Электрическая индукция (электрическое смещение)	D	кулон на квадратный метр (Кл/м^2)	$12\pi\cdot10^5$
Электрическая емкость	C	фарада (Ф)	$9\cdot10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	R	ом (Ом)	$\frac{1}{9}\cdot10^{-11}$ с·см$^{-1}$
Удельное электрическое сопротивление	ρ	ом-метр (Ом·м)	$\frac{1}{9}\cdot10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda=1/R$	сименс (См)	$9\cdot10^{11}$ см·с$^{-1}$
Удельная электрическая проводимость (удельная электропроводимость)	λ	сименс на метр (См/м)	$9\cdot10^9$ с$^{-1}$
Магнитный поток	Φ	вебер (Вб)	10^8 Мкс
Магнитная индукция	B	тесла (Т)	10^4 Гс
Напряженность магнитного поля	H	ампер на метр (А/м)	$4\pi\cdot10^{-3}$ Э

Наименование	Обозначение	СИ	Гауссова система
Намагниченность	$\mathcal{Y}$	ампер на метр (А/м)	$\frac{1}{4\pi}\cdot 10^4$ Гс
Индуктивность	L	генри (Г)	10^9 см

Примечание. Множители 3 (кроме входящих в показатели степени) при точных расчетах следует заменить на 2,99792458 в соответствии с точным значением скорости света. Например, в строке «электрическая индукция» вместо $12\pi\cdot 10^5$ при точных расчетах следует брать $2{,}99792458\cdot 4\pi\cdot 10^5$. В тех случаях, когда для гауссовых единиц существует общепринятое наименование, оно приведено в таблице. В остальных случаях приведено только число таких единиц.

Для перевода формулы электродинамики из гауссовой системы в систему СИ следует все величины в этой формуле умножить на коэффициент, приведенный в последнем столбце таблицы. Все чисто механические величины при этом не преобразуются (коэффициенты равны единице). Исключение составляет скорость света в вакууме c, которая заменяется на $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

Пример. В гауссовой системе напряженность магнитного поля бесконечного прямого провода определяется формулой

$$H=\frac{2I}{cr}.$$

Для перевода в систему СИ умножим согласно таблице H на $\sqrt{4\pi\mu_0}$, I на $1/\sqrt{4\pi\varepsilon_0}$, c заменяем на $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, r оставляем без изменения. Получаем

$$\sqrt{4\pi\mu_0}H=\frac{2I}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0}}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\frac{1}{r},$$

или после сокращения

$$H=\frac{I}{2\pi r}.$$

Для выполнения обратного преобразования из системы СИ в гауссову надо пользоваться обратными значениями «коэффициентов перехода».

Пример. В системе СИ

$$B=\mu_0(H+\mathcal{Y}).$$

Умножая на соответствующие коэффициенты, получим

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}}B=\mu_0\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi\mu_0}}H+\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}\mathcal{Y}\right).$$

После сокращения получаем формулу гауссовой системы

$$B=H+4\pi\mathcal{Y}.$$

III. Некоторые сведения по специальной теории относительности

В специальной теории относительности (СТО) под событием понимают все то, что происходит в данной точке пространства в данный момент времени. В СТО рассматриваются только инерциальные системы отсчета, которые определяются как системы отсчета, в которых справедлив закон инерции Ньютона. Инерциальные системы отсчета отличаются друг от друга тем, что движутся друг относительно друга равномерно и поступательно (с различными относительными скоростями). Будем предполагать, что во всех системах отсчета оси Y, Y' и Z, Z' соответственно параллельны друг другу, а относительная скорость любых двух систем отсчета направлена по общей оси X, X'. Скорость системы K' относительно K обозначим через V, а скорость системы K относительно K' через $-V$. Система отсчета всегда определена относительно материальных тел и движется по отношению к ним и другим системам отсчета со скоростью, меньшей скорости света.

В каждой системе отсчета можно определить координаты любого события (в «координаты» включается также и время наступления события). Преобразования Лоренца — это преобразования координат события при переходе от одной системы к другой. Эти преобразования при переходе от K к K' и от K' к K имеют следующий вид:

$$x' = \Gamma (x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \Gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) \tag{1}$$

$$x = \Gamma (x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \Gamma \left(t' + \frac{V}{c^2} x' \right), \tag{2}$$

где введены обозначения:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{B}^2}}, \quad \mathrm{B} = \frac{V}{c}. \tag{3}$$

В (3) входит постоянная скорость относительного движения двух систем отсчета V, поэтому В и Г — постоянные величины. В задачах и решениях используются также обозначения:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \tag{3'}$$

где v — скорость частицы, которая может быть переменной.

Релятивистское уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{d}{dt} (m\gamma \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \tag{4}$$

причем $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ — скорость частицы, а $\boldsymbol{F}$ — сила. Полная энергия свободной частицы в релятивистской механике определяется соотношением

$$\mathcal{E} = mc^2\gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{5}$$

Кинетическая энергия в релятивистской механике T_r определяется как разность

$$T_r = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = mc^2(\gamma - 1), \qquad (6)$$

где $\mathscr{E}_0 = mc^2$ — энергия покоя частицы. В формулах (4)—(6) через m обозначена масса покоя частицы.

Очень плодотворной оказалась четырехмерная интерпретация теории относительности. В 4-пространстве-времени («Мир Минковского») в каждой точке с координатами (x, y, z, t) может наступать событие. Существенное упрощение в выкладках достигается введением четвертой мнимой координаты[1] ict и симметризацией обозначений: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$. Таким образом, вводится 4-радиус-вектор $\vec{R}$ (4-векторы обозначаются стрелочкой над буквой) с компонентами

$$\vec{R}\begin{Bmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x, & y, & z, & ict \end{Bmatrix} = (\mathbf{r}, ict). \qquad (7)$$

Преобразования Лоренца — это преобразования компонент 4-радиуса-вектора $\vec{R}$:

$$x_1' = \Gamma(x_1 + iBx_4), \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = \Gamma(x_4 - iBx_1), \qquad (8)$$

$$x_1 = \Gamma(x_1' - iBx_4'), \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3', \quad x_4 = \Gamma(x_4' + iBx_1'). \qquad (9)$$

Эти преобразования могут быть записаны с помощью матрицы Лоренца

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix} \qquad (10)$$

в виде

$$x_i = \alpha_{ik} x_k', \qquad (11)$$

$$x_i' = \alpha_{ki} x_k, \qquad (12)$$

где по двум одинаковым индексам в одной части равенства подразумевается суммирование от 1 до 4. Нетрудно проверить, что формулы (8), (9), (11) и (12) совпадают с (1) и (2).

Компоненты всех 4-векторов преобразуются по правилам преобразования компонент 4-радиуса-вектора. Если заданы компоненты 4-вектора, $\vec{A}(A_1, A_2, A_3, A_4)$ в системе K, то компоненты этого же вектора в K' найдутся по формулам (мы приводим также

---

[1]) Необходимо подчеркнуть, что появление мнимой координаты связано исключительно с тем, что мы хотим сохранить тот вид основных геометрических формул, к которому мы привыкли в трехмерном евклидовом пространстве. Можно избежать введения мнимой координаты, но тогда появляется необходимость введения метрического тензора и разделения ко- и контравариантных компонент; введение этих понятий едва ли оправдано в курсе общей физики.

и формулы обратного перехода)

$$A_1' = \Gamma (A + i\mathrm{B} A_4), \quad A_2' = A_2, \quad A_3' = A_3, \quad A_4' = \Gamma (A_4 - i\mathrm{B} A_1), \tag{13}$$

$$A_1 = \Gamma (A_1' - i\mathrm{B} A_4'), \quad A_2 = A_2', \quad A_3 = A_3', \quad A_4 = \Gamma (A_4' + i\mathrm{B} A_1') \tag{14}$$

или, в сокращенной форме,

$$A_i = \alpha_{ik} A_k', \tag{15}$$

$$A_i' = \alpha_{ki} A_k. \tag{16}$$

Квадрат модуля 4-вектора является инвариантом и определяется по формуле

$$\vec{A}^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 = A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 + A_4'^2. \tag{17}$$

В механике СТО вводят следующие 4-векторы:

а) 4-скорость

$$\vec{u} = \frac{d\vec{R}}{d\tau},$$

где $d\tau = dt/\gamma$ — собственное время частицы, с компонентами (приводим обычные и симметричные обозначения в фигурных скобках, а также сокращенное обозначение с использованием трехмерных векторных величин)

$$\vec{u} \begin{Bmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ \gamma v_x, & \gamma v_y, & \gamma v_z, & ic\gamma \end{Bmatrix} \equiv (\gamma \boldsymbol{v}, \ ic\gamma); \tag{18}$$

б) 4-импульс

$$\vec{\mathfrak{p}} = m\vec{u} \tag{19}$$

с компонентами

$$\vec{\mathfrak{p}} \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_1, & \mathfrak{p}_2, & \mathfrak{p}_3, & \mathfrak{p}_4 \\ m\gamma v_x, & m\gamma v_y, & m\gamma v_z, & i\dfrac{\mathscr{E}}{c} \end{Bmatrix} \equiv \left(\boldsymbol{p}, \ i\frac{\mathscr{E}}{c}\right), \tag{20}$$

где $\boldsymbol{p}$ — релятивистский импульс частицы:

$$\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}, \tag{21}$$

$\mathscr{E}$ — релятивистская энергия частицы (5), m — инвариантная масса покоя частицы;

в) 4-сила Минковского $\vec{\mathfrak{F}}$ с компонентами

$$\vec{\mathfrak{F}} \begin{Bmatrix} \mathfrak{F}_1, & \mathfrak{F}_2, & \mathfrak{F}_3, & \mathfrak{F}_4 \\ \gamma F_x, & \gamma F_y, & \gamma F_z, & \dfrac{i}{c}\gamma(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}) \end{Bmatrix} \equiv \left(\gamma\boldsymbol{F}, \ \frac{i}{c}\gamma(\boldsymbol{F}\boldsymbol{v})\right), \tag{22}$$

где $\boldsymbol{F}$ — обычная трехмерная сила.

Четырехмерное уравнение движения

$$\frac{d\vec{\mathfrak{p}}}{d\tau} \equiv m\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \vec{\mathfrak{F}} \tag{23}$$

можно переписать в компонентах (первые три компоненты сведены в одно трехмерное векторное уравнение):

$$\frac{d}{dt}(m\gamma\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}(mc^2\gamma) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}. \tag{25}$$

Из определения релятивистской энергии частицы и релятивистского импульса следует полезное соотношение:

$$\boldsymbol{p}=m\gamma\boldsymbol{v}=\frac{mc^2\gamma}{c^2}\boldsymbol{v}=\frac{\mathscr{E}}{c^2}\boldsymbol{v}. \tag{26}$$

В релятивистской электродинамике вводят следующие 4-векторы:

а) 4-плотность тока $\vec{s}$ с компонентами

$$\vec{s}\begin{Bmatrix} s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ j_x, & j_y, & j_z, & ic\rho \end{Bmatrix}=(\boldsymbol{j},\ ic\rho), \tag{27}$$

где $\boldsymbol{j}$ — плотность тока ($\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{v}$), ρ — плотность заряда;

б) 4-потенциал $\vec{\Phi}$ с компонентами

$$\vec{\Phi}\begin{Bmatrix} \Phi_1, & \Phi_2 & \Phi_3, & \Phi_4 \\ A_x, & A_y, & A_z, & i\frac{\varphi}{c} \end{Bmatrix}=\left(\boldsymbol{A},\ \frac{i}{c}\varphi\right), \tag{28}$$

где $\boldsymbol{A}$ — векторный, φ — скалярный потенциалы электромагнитного поля.

В трехмерной электродинамике поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ связаны с потенциалами $\boldsymbol{A}$ и φ следующими формулами:

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\dot{\boldsymbol{A}},\quad \nabla\varphi=\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{30}$$

В релятивистской электродинамике связь полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ с компонентами 4-потенциала дается соотношением

$$F_{ik}=c\left(\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_i}-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_k}\right)\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{31}$$

Величины F_{ik} образуют тензор электромагнитного поля:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -iB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Правила преобразования компонент тензора:

$$F_{ik}=\alpha_{im}\alpha_{kl}F'_{ml}, \tag{33}$$

$$F'_{ik}=\alpha_{mi}\alpha_{lk}F_{ml}, \tag{34}$$

где справа подразумевается двойное суммирование по m и l; индексы i, k независимо принимают все значения от 1 до 4; коэффициенты α_{im} — элементы матрицы Лоренца (10).